III. országos magyar matematikaolimpia
XXX. EMMV
Déva, 2020. február 11–16.

XI. osztály – I. forduló

1. feladat. Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ valós számsorozatot a következőképpen értelmezzük:

$$x_1 = 1 \quad \text{és} \quad x_{n+1} = n \cdot x_n + n - 1,$$

bármely $n \geq 1$ esetén. Ha

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+x_k} \quad \text{és} \quad b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{1+x_{k+1}},$$

számítsd ki a következő határértékeket:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

dr. Bencze Mihály, Brassó
Szilágyi Judit, Kolozsvár

Megoldás.

a) Mivel $x_{n+1} + 1 = n(x_n + 1)$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, így rendre írhatjuk, hogy **(1 pont)**

$$\begin{aligned} x_n + 1 &= (n-1)\cdot(x_{n-1}+1) \\ x_{n-1} + 1 &= (n-2)\cdot(x_{n-2}+1) \\ &\vdots \\ x_2 + 1 &= 1 \cdot (x_1 + 1). \end{aligned}$$

Az egyenleteket összeszorozva kapjuk, hogy $x_n = 2(n-1)! - 1$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén. **(3 pont)**

Innen

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+x_k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}\right),$$

tehát $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{e}{2}$. **(2 pont)**

b) Írhatjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
b_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{1+x_{k+1}} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{k!} && \textbf{(1 pont)}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{1}{1!}\right)+\left(\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{(n-1))!}-\frac{1}{n!}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n!}\right), && \textbf{(2 pont)}
\end{aligned}
$$

innen $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \dfrac{1}{2}$.

Hivatalból **(1 pont)**

■

2. feladat. Ha $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, akkor igazold a

$$\frac{8}{3}\det(A^2+A+I_2) \geq (1-\det A)^2 + (1+\operatorname{Tr} A)^2$$

egyenlőtlenséget!

dr. Bencze Mihály, Brassó
Ugron Szabolcs, Sepsiszentgyörgy

Megoldás. Legyen az A mátrix karakterisztikus polinomja

$$p_A(x) = \det(A - xI_2) = x^2 - ax + b,$$

ahol $a = \operatorname{Tr}(A)$ és $b = \det(A)$. **(2 pont)**
Teljesül, hogy

$$\det(A^2+A+I_2) = \det(A-\varepsilon I_2)\det(A-\varepsilon^2 I_n) = p_A(\varepsilon)\cdot p_A(\varepsilon^2),$$

ahol $\varepsilon^3 = 1$ és $\varepsilon \neq 1$. **(2 pont)**
Azt kapjuk, hogy

$$\det(A^2+A+I_2) = (\varepsilon^2 - a\cdot\varepsilon + b)(\varepsilon - a\cdot\varepsilon^2 + b) = a^2+b^2+ab+a-b+1. \quad \textbf{(2 pont)}$$

Igazoljuk, hogy

$$\frac{8}{3}(a^2+b^2+ab+a-b+1) \geq (1-b)^2 + (1+a)^2.$$

Ezt rendezve kapjuk, hogy

$$5a^2+8ab+2a+5b^2-2b+2 \geq 0,$$

ami ekvivalens a

$$(2a+2b)^2 + (a+1)^2 + (b-1)^2 \geq 0 \quad \textbf{(3 pont)}$$

egyenlőtlenséggel, ami igaz bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén.
Hivatalból **(1 pont)**

■

3. feladat. Az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozatot a következőképpen értelmezzük: $x_1 \in (0,1)$ és $x_{n+1} = x_n - x_n^{k+1}$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, ahol $k \in \mathbb{N}^*$ rögzített.

a) Igazold, hogy a sorozat konvergens és számítsd ki a határértékét!

b) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{k}} x_n$ határértéket!

dr. Bencze Mihály, Brassó
Ványi Emese, Szatmárnémeti

Megoldás.

a) Indukcióval igazoljuk, hogy $x_n \in (0,1)$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén. Ha $x_n \in (0,1)$, akkor $x_n^k \in (0,1)$. Innen következik, hogy $1-x_n^k \in (0,1)$, tehát $x_{n+1} = x_n(1-x_n^k) \in (0,1)$, vagyis $(x_n)_{n\geq 1}$ korlátos. **(1 pont)**
Ugyanakkor $x_{n+1} - x_n = -x_n^{k+1} < 0$, tehát a sorozat szigorúan csökkenő. Mivel a sorozat monoton és korlátos, így konvergens is. **(1 pont)**
Létezik $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$. Határértékre térve a rekurziós összefüggésben az $l = l - l^{k+1}$ összefüggést kapjuk, ahonnan $l = 0$. **(1 pont)**

b) Legyen $y_n = n^{\frac{1}{k}} \cdot x_n$, ekkor $y_n^k = n \cdot x_n^k$. Kiszámítjuk a $\lim\limits_{n\to\infty} y_n^k$ határértéket. **(1 pont)**
Teljesül, hogy
$$\lim_{n\to\infty} y_n^k = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n^k}}.$$
Mivel $x_n^k \in (0,1)$ és x_n^k szigorúan csökkenő, valamint $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, az $\frac{1}{x_n^k}$ sorozat növekvő és nem korlátos. **(1 pont)**
A következőket írhatjuk:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\frac{1}{x_{n+1}^k} - \frac{1}{x_n^k}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^k x_{n+1}^k}{x_n^k - x_{n+1}^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^k x_n^k (1-x_n^k)^k}{x_n^k - x_n^k(1-x_n^k)^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^k(1-x_n^k)^k}{1-(1-x_n^k)^k} \qquad \textbf{(1 pont)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^k(1-x_n^k)^k}{kx_n^k - C_k^2 x_n^{2k} + \cdots - (-1)^k x_n^{k^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1-x_n^k)^k}{k - C_k^2 x_n^k + \cdots - (-1)^k x_n^{k^2-k}}$$
(1 pont)
$$= \frac{1}{k},$$
mivel $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^k = 0$, az előző alpont alapján. **(1 pont)**
A Cesaro–Stolz tétel értelmében, azt kapjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} y_n^k = \frac{1}{k}$, ahonnan $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \sqrt[k]{\frac{1}{k}}$.

(1 pont)

Hivatalból **(1 pont)**

■

4. feladat. Legyen $n \geq 2$ egy természetes szám és $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, úgy, hogy $\det(A) = 1$ és a B mátrix összes eleme egyes. Igazold, hogy ha $\det(A^{-1} + B) = 1$, akkor A elemeinek összege nulla!

Kajántó Sándor, BBTE
Lukács Andor, BBTE

Első megoldás. A feltétel alapján

$$1 = \det(A)\det(A^{-1} + B) = \det(AB + I_n). \quad \textbf{(2 pont)}$$

Ha $A = [a_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n}$, akkor

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 & s_1 & \dots & s_1 \\ s_2 & s_2 & \dots & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & s_n & \dots & s_n \end{pmatrix}, \quad \textbf{(2 pont)}$$

ahol s_k jelöli az A mátrix k-adik sorában lévő elemek összegét, minden $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén. Ekkor a következőket írhatjuk

$$1 = \begin{vmatrix} s_1 + 1 & s_1 & \dots & s_1 \\ s_2 & s_2 + 1 & \dots & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & s_n & \dots & s_n + 1 \end{vmatrix} = \left(1 + \sum_{k=1}^{n} s_k\right) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ s_2 & s_2 + 1 & \dots & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & s_n & \dots & s_n + 1 \end{vmatrix} \quad \textbf{(3 pont)}$$

$$= \left(1 + \sum_{k=1}^{n} s_k\right) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ s_2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 + \sum_{k=1}^{n} s_k. \quad \textbf{(1 pont)}$$

Innen következik, hogy A elemeinek összege $\sum\limits_{k=1}^{n} s_k = 0$. **(1 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

■

Megjegyzés. Ha $1 = \det(A^{-1} + B)\det(A) = \det(BA + I_n)$-ből indulunk ki, akkor BA mátrix elemei az oszloponkénti összegek lesznek és így az $1 = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} o_k$ egyenlőséghez jutunk.

Második megoldás. Észrevesszük, hogy A elemeinek összege $\operatorname{Tr}(AB)$. Egyrészt

$$1 = \det(A)\det(A^{-1} + B) = \det(AB + I_n) = p_{AB}(-1),$$

ahol p_{AB} az AB karakterisztikus polinomja. Másrészt, mivel $\operatorname{rang}(A) = n$ és $\operatorname{rang}(B) = 1$, ezért $\operatorname{rang}(AB) = 1$. A karakterisztikus polinom tulajdonságai alapján ez azt eredményezi, hogy

$$p_{AB}(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} \operatorname{Tr}(AB) x^{n-1},$$

minden $x \in \mathbb{C}$ esetén. Az előbbiek alapján

$$1 = p_{AB}(-1) = 1 + \operatorname{Tr}(AB),$$

ahonnan $\operatorname{Tr}(AB) = 0$, vagyis A elemeinek összege nulla. ■

Harmadik megoldás. Ha $A = [a_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}$ és $A^{-1} = [\alpha_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}$, a $\det(A) = 1$ feltételből következik, hogy $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}\delta_{ji}$ az a_{ji} algebrai komplementuma. Hasonlóan, az $(A^{-1})^{-1} = A$ összefüggésből (és mivel $\det(A^{-1}) = 1$), következik, hogy $a_{ij} = (-1)^{i+j}d_{ji}$ az α_{ji} algebrai komplementuma. Legyen O_k az A^{-1} mátrix k-adik oszlopa, valamint $V = \begin{pmatrix}1 & 1 & \dots & 1\end{pmatrix}^T$ a B mátrix k-adik oszlopa, minden $k \in \{1, 2 \dots, n\}$ esetén. A determináns tulajdonságai alapján írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\det(A^{-1} + B) &= \det(O_1 + V, O_2 + V, \dots, O_n + V) \\
&= \det A + \sum_{k=1}^{n} \det(O_1, \dots, O_{k-1}, V, O_{k+1}, \dots, O_n) \\
&= \det A + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} (-1)^{k+l} d_{kl} \\
&= \det A + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{lk}.
\end{aligned}$$

A megadott feltételek alapján innen következik, hogy A elemeinek összege nulla.

∎