MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN HUNEDOARA

III. országos magyar matematikaolimpia
XXX. EMMV
Déva, 2020. február 11–16.

X. osztály – I. forduló

1. feladat. Adottak az $a_1, a_2, a_3 \in (1, +\infty)$ és

$$t = \frac{a_1^2}{2a_2 + a_3} + \frac{a_2^2}{2a_3 + a_1} + \frac{a_3^2}{2a_1 + a_2}$$

számok. Igazold, hogy $\log_{a_1} t + \log_{a_2} t + \log_{a_3} t \geq 3$. *dr. Bencze Mihály, Brassó*

Megoldás. Alkalmazva a Bergström-egyenlőtlenséget (vagy a Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség következményét), azt kapjuk, hogy

$$t = \frac{a_1^2}{2a_2 + a_3} + \frac{a_2^2}{2a_3 + a_1} + \frac{a_3^2}{2a_1 + a_2} \geq \frac{(a_1+a_2+a_3)^2}{(2a_2 + a_3 + 2a_3 + a_1 + 2a_1 + a_2)} = \frac{a_1+a_2+a_3}{3}. \quad \textbf{(2 pont)}$$

Felhasználva a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget, miszerint $\frac{a_1+a_2+a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1a_2a_3}$, következik, hogy

$$t \geq \sqrt[3]{a_1a_2a_3}, \quad \forall a_1, a_2, a_3 \in (1, \infty). \quad \textbf{(2 pont)}$$

Így

$$\begin{aligned}
\log_{a_1} t + \log_{a_2} t + \log_{a_3} t &\geq \log_{a_1} \sqrt[3]{a_1a_2a_3} + \log_{a_2} \sqrt[3]{a_1a_2a_3} + \log_{a_3} \sqrt[3]{a_1a_2a_3} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \left(\log_{a_1} a_1 + \log_{a_1} a_2 + \log_{a_1} a_3 + \cdots + \log_{a_3} a_1 + \log_{a_3} a_2 + \log_{a_3} a_3 \right) \\
&\qquad \textbf{(2 pont)} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \left[3 + (\log_{a_1} a_2 + \log_{a_2} a_1) + (\log_{a_2} a_3 + \log_{a_3} a_2) + (\log_{a_3} a_1 + \log_{a_1} a_3) \right] \\
&= \frac{1}{3} \cdot \left[3 + \left(\log_{a_1} a_2 + \frac{1}{\log_{a_1} a_2} \right) + \cdots + \left(\log_{a_3} a_1 + \frac{1}{\log_{a_3} a_1} \right) \right] \\
&\geq \frac{1}{3} \cdot (3 + 2 + 2 + 2) = 3, \qquad \textbf{(2 pont)}
\end{aligned}$$

ahol alkalmaztuk az $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$, $\forall x > 0$ egyenlőtlenséget a $\log_a b > 0$ számokra, ahol $a, b \in (1, +\infty)$.

Mivel a megoldás során alkalmaztuk a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget az $a_1, a_2, a_3 > 1$ számokra, következik, hogy egyenlőség csak akkor állhat fent, ha $a_1 = a_2 = a_3$. Ebben az esetben valóban fennáll az egyenlőség. **(1 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

■

Megjegyzés. (dr. Bencze Mihály) Az előbbi megoldáshoz hasonlóan igazolható a következő, általánosabb állítás is:

Ha $n \geq 3$, természetes szám, $a_1, a_2, \ldots, a_n > 1$ valós számok és

$$t = \frac{a_1^2}{(n-1)a_2 + a_3} + \frac{a_2^2}{(n-1)a_3 + a_4} + \cdots + \frac{a_{n-2}^2}{(n-1)a_{n-1} + a_n} + \frac{a_{n-1}^2}{(n-1)a_n + a_1} + \frac{a_n^2}{(n-1)a_1 + a_2},$$

akkor

$$\sum_{k=1}^{n} \log_{a_k} t \geq n.$$

2. feladat. Adott az O középpontú és egységsugarú körbe írt ABC háromszög és jelölje M, N és P rendre az AB, AC és BC oldalak felezőpontjait.

a) Igazold, hogy $9OG^2 + AB^2 + AC^2 + BC^2 = 9$, ahol G az ABC háromszög súlypontja!

b) Ha $4(MO^2 + NO^2 + PO^2) = 3$, igazold, hogy az ABC háromszög egyenlő oldalú!

Mátéfi István, Marosvásárhely

Megoldás.

a) Komplex számok segítségével oldjuk meg a feladatot. Tekintsünk egy O középpontú koordinátarendszert és jelölje $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, és $G(g)$ a pontok affixumait. Innen következik, hogy

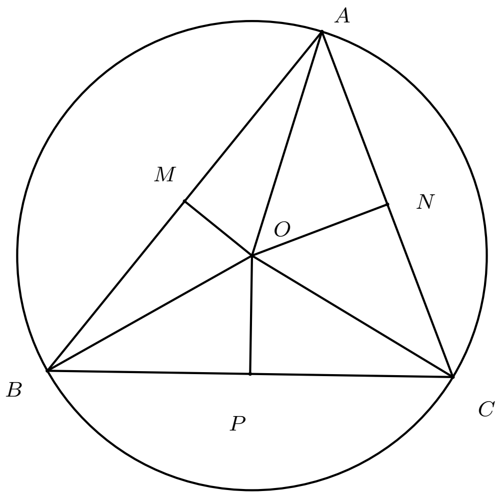
$$9OG^2 + AB^2 + AC^2 + BC^2 = 9|g|^2 + |b-a|^2 + |c-a|^2 + |c-b|^2. \qquad (\textbf{2 pont})$$

Felhasználva a $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$ összefüggést, azt kapjuk, hogy (**1 pont**)

$$\begin{aligned}
9\left|\frac{a+b+c}{3}\right|^2 &+ |b-a|^2 + |c-a|^2 + |c-b|^2 = \\
&= (a+b+c)(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}) + (b-a)(\overline{b}-\overline{a}) + (c-a)(\overline{c}-\overline{a}) + (c-b)(\overline{c}-\overline{b}) \\
&= a\overline{a} + a\overline{b} + a\overline{c} + b\overline{a} + b\overline{b} + b\overline{c} + c\overline{a} + c\overline{b} + c\overline{c} + \\
&\qquad + b\overline{b} - b\overline{a} - a\overline{b} + a\overline{a} + c\overline{c} - c\overline{a} - a\overline{c} + a\overline{a} + c\overline{c} - c\overline{b} - b\overline{c} + b\overline{b} \\
&= 3|a|^2 + 3|b|^2 + 3|c|^2 = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 9, \qquad (\textbf{2 pont})
\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy $|a| = |b| = |c| = OA = OB = OC = 1$.

b)



Az AOB háromszögben felírjuk az oldalfelező tételét:

$$OM^2 = \frac{2(OA^2 + OB^2) - AB^2}{4},$$

ahonnan $4OM^2 = 4 - AB^2$. Megismételve a fenti gondolatmenetet az AOC, illetve a BOC háromszögekben, azt kapjuk, hogy

$$4ON^2 = 4 - AC^2 \quad \text{és} \quad 4OP^2 = 4 - BC^2.$$ (**2 pont**)

Összeadva a kapott összefüggéseket, azt kapjuk, hogy

$$4(MO^2 + NO^2 + PO^2) = 12 - (AB^2 + AC^2 + BC^2).$$ (**1 pont**)

Az a) alpont alapján innen következik, hogy

$$3 = 12 - 9 + 9OG^2,$$

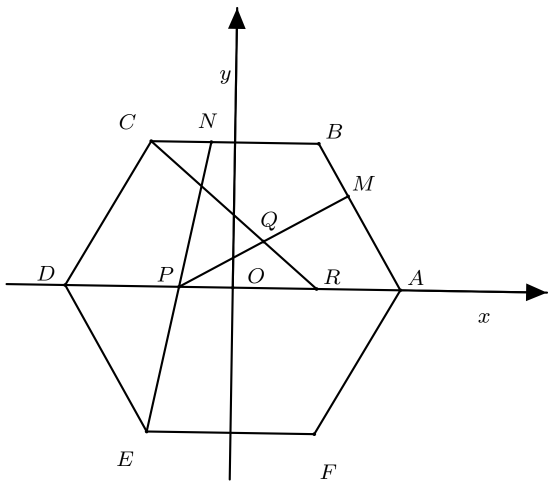
vagyis $OG^2 = 0$ és $O = G$. Tehát az ABC háromszögben a köré írt kör középpontja egybeesik a súlyponttal, ezért az ABC háromszög egyenlő oldalú. (**1 pont**)

Hivatalból (**1 pont**)

■

3. feladat. Adott az $ABCDEF$ szabályos hatszög, melynek O a középpontja. Legyen $M \in (AB)$ és $N \in (BC)$ úgy, hogy $AM = BN$. Ha P felezőpontja az (NE) szakasznak, Q felezőpontja az (MP) szakasznak és R felezőpontja az (AO) szakasznak, igazold, hogy a C, Q, R pontok egy egyenesen helyezkednek el! *Turdean Katalin, Zilah*

Első megoldás. Komplex számok segítségével oldjuk meg a feladatot. Az xOy koordináta-rendszert úgy választjuk meg, hogy annak kezdőpontja egybeessen a hatszög középpontjával, valamint az A pont affixuma 1 legyen.



Innen következik, hogy a szabályos hatszög csúcsainak affixuma a következőképpen írható:

$$A(1); \quad B(\omega); \quad C(\omega^2); \quad D(-1); \quad E(-\omega); \quad F(-\omega^2),$$

ahol $\omega = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$, vagyis $\omega^3 = -1$ és $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. **(2 pont)**

Mivel $AM = BN$ és $AB = BC$, következik, hogy

$$\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = k, \quad \text{ahol } k > 0.$$

A szakaszt adott arányban osztó pont affixuma alapján

$$z_M = \frac{z_A + kz_B}{1+k} = \frac{1+k\omega}{1+k} \quad \text{és} \quad z_N = \frac{z_B + kz_C}{1+k} = \frac{\omega + k\omega^2}{1+k}.$$ **(2 pont)**

Felírjuk a P, Q, R pontok affixumát. Mivel $\omega^2 - \omega + 1 = 0$, ezért

$$z_P = \frac{z_N + z_E}{2} = \frac{\frac{\omega+k\omega^2}{1+k} - \omega}{2} = \frac{k\omega^2 - k\omega}{2(1+k)} = \frac{k(\omega^2-\omega)}{2(1+k)} = -\frac{k}{2(1+k)},$$

$$z_Q = \frac{z_M + z_P}{2} = \frac{\frac{1+k\omega}{1+k} - \frac{k}{2(1+k)}}{2} = \frac{2 + 2k\omega - k}{4(1+k)},$$

$$z_R = \frac{z_O + z_A}{2} = \frac{1}{2}.$$ **(2 pont)**

Az előbbi összefüggésekből következik, hogy

$$\frac{z_Q - z_R}{z_C - z_R} = \frac{\frac{2+2k\omega-k}{4(1+k)} - \frac{1}{2}}{\omega^2 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{2k\omega-3k}{4(1+k)}}{\frac{2\omega^2-1}{2}} = \frac{k(2\omega-3)}{2(1+k)(2\omega^2-1)}$$

$$= \frac{k(2\omega-3)}{2(1+k)(2(\omega-1)-1)} = \frac{k}{2(1+k)} \in \mathbb{R}^*,$$ **(3 pont)**

és ezért a C, Q, R pontok egy egyenesen helyezkednek el.

Hivatalból **(1 pont)**

■

Második megoldás. Legyen $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ és $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Innen következik, hogy $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{OD} = -\vec{a}$ és $\overrightarrow{OE} = -\vec{b}$. **(2 pont)**

Mivel $AM = BN$ és $AB = BC$, következik, hogy $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{BN}{NC} = k$ valamilyen $k > 0$ esetén. Az előző összefüggesek alapján

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}}{1+k} = \frac{\vec{a} + k\vec{b}}{1+k} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{ON} = \frac{\overrightarrow{OB} + k\overrightarrow{OC}}{1+k} = \frac{\vec{b} + k(\vec{b} - \vec{a})}{1+k} = \frac{-k\vec{a} + (1+k)\vec{b}}{1+k}.$$

(2 pont)

Innen következik, hogy

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OE}}{2} = \frac{\frac{-k\vec{a}+(1+k)\vec{b}}{1+k} - \vec{b}}{2} = \frac{-k\vec{a}}{2(1+k)},$$

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP}}{2} = \frac{\frac{\vec{a}+k\vec{b}}{1+k} - \frac{k\vec{a}}{2(1+k)}}{2} = \frac{(2-k)\vec{a} + 2k\vec{b}}{4(1+k)},$$

$$\overrightarrow{OR} = \frac{\vec{a}}{2}.$$

(2 pont)

Az előző összefüggések alapján

$$\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OR} = \frac{(2-k)\vec{a} + 2k\vec{b}}{4(1+k)} - \frac{\vec{a}}{2} = \frac{-3k\vec{a} + 2k\vec{b}}{4(1+k)} = \frac{k}{4(1+k)}(-3\vec{a} + 2\vec{b}),$$

valamint

$$\overrightarrow{CR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OC} = \frac{\vec{a}}{2} - (\vec{b} - \vec{a}) = \frac{3\vec{a} - 2\vec{b}}{2} = -\frac{(-3\vec{a} + 2\vec{b})}{2},$$

tehát $\overrightarrow{RQ} = -\dfrac{k}{2(1+k)} \cdot \overrightarrow{CR}$. Innen következik, hogy C, Q, R kollineárisak. **(3 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

■

4. feladat. Adott az n rögzített természetes szám. Határozd meg azokat az $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ függvényeket, amelyekre

$$(xy)^n \cdot \lg(xy) \leq x^n f(y) + y^n f(x) \leq f(xy),$$

minden $x, y > 0$ esetén!

dr. Bencze Mihály, Brassó

Első megoldás. Ha $x = y = 1$, akkor a megadott feltétel alapján $1^n \cdot \lg 1 \leq 1^n \cdot f(1) + 1^n \cdot f(1) \leq f(1)$, ahonnan

$$0 \leq f(1) + f(1) \leq f(1), \quad \text{tehát} \quad f(1) = 0. \tag{1}$$

(2 pont)

Ha $y = 1$, akkor $x^n \lg x \leq x^n f(1) + 1^n \cdot f(x) \leq f(x)$. Felhasználva az (1) összefüggést, következik, hogy minden $x > 0$ esetén

$$x^n \cdot \lg x \leq f(x). \tag{2}$$

(2 pont)

Ha most $y = \dfrac{1}{x}$-et helyettesítünk a kezdeti feltételbe, akkor az

$$\left(x \cdot \frac{1}{x}\right)^n \lg\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) \leq x^n \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^n} \cdot f(x) \leq f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right)$$

összefüggést kapjuk minden $x > 0$ esetén. Innen következik, hogy

$$1 \lg 1 \leq x^n \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^n} \cdot f(x) \leq f(1)$$

minden $x > 0$ esetén, amiből ugyancsak az (1) összefüggés alapján azt kapjuk, hogy

$$0 \leq x^n \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^n} \cdot f(x) \leq 0,$$

minden $x > 0$ esetén. Ez alapján $x^n \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^n} \cdot f(x) = 0$, tehát $f\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^{2n}} \cdot f(x)$, minden $x > 0$ esetén. **(2 pont)**

A (2) egyenlőtlenségből az $x \mapsto \frac{1}{x}$ helyettesítéssel következik, hogy

$$\frac{1}{x^n} \cdot \lg\left(\frac{1}{x}\right) \leq f\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^{2n}} \cdot f(x), \quad \forall x > 0,$$ **(1 pont)**

vagyis $-\frac{1}{x^n} \lg x \leq -\frac{1}{x^{2n}} f(x)$, minden $x > 0$ esetén. Ezt az összefüggést beszorozva $(-x^{2n})$-nel, az

$$x^n \cdot \lg x \geq f(x), \quad \forall x > 0 \tag{3}$$

(1 pont)

egyenlőtlenséghez jutunk. A (2) és (3) egyenlőtlenségek alapján egyetlen ilyen f függvény létezik és

$$f(x) = x^n \cdot \lg x, \quad \forall x > 0.$$ **(1 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

■

Második megoldás. Ha osztjuk a megadott egyenlőtlenségeket az $(xy)^n > 0$ számmal minden $x, y > 0$ esetén, akkor az

$$\lg(xy) \leq \frac{f(y)}{y^n} + \frac{f(x)}{x^n} \leq \frac{f(xy)}{(xy)^n}, \quad \forall x, y > 0$$ **(1 pont)**

ekvivalens egyenlőtlenséghez jutunk. Vezessük be a $g\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f(x)}{x^n}$ függvényt. Az f-re megadott egyenlőtlenségek így egyenértékűek a

$$\lg(xy) \leq g(x) + g(y) \leq g(xy), \quad \forall x, y > 0$$ **(1 pont)**

egyenlőtlenségekkel. Innen a az alábbi következtetéseket vonhatjuk le:

a) az $x = y = 1$ helyettesítésből következik, hogy $0 \leq 2g(1) \leq g(1)$, tehát $g(1) = 0$; **(1 pont)**

b) az $y = \frac{1}{x}$ helyettesítésből következik, hogy $0 \leq g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right) \leq g(1) = 0$, tehát $g\left(\frac{1}{x}\right) = -g(x)$, minden $x > 0$ esetén; **(1 pont)**

c) az $y = 1$ helyettesítésből következik, hogy $\lg x \leq g(x)$, minden $x > 0$ esetén; (**1 pont**)

A c) és b) alpontok alapján az $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ helyettesítésből azt kapjuk, hogy

$$-\lg x = \lg \frac{1}{x} \leq g\left(\frac{1}{x}\right) = -g(x), \quad \forall x > 0, \qquad \textbf{(2 pont)}$$

tehát $\lg x \geq g(x)$, minden $x > 0$ esetén. Innen viszont a c) alpont alapján azt kapjuk, hogy $g(x) = \lg x$, vagyis $f(x) = x^n \cdot \lg x$, minden $x > 0$ esetén. (**2 pont**)

Hivatalból (**1 pont**)

■

Megjegyzés. A második megoldásban bemutatott gondolatmenet alapján teljesül, hogy ha $n \in \mathbb{N}$ és $n \geq 2$, akkor a

$$\lg\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} g(x_k) \leq g\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right), \quad \forall x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$$

függvényegyenlőtlenség megoldása $g(x) = \lg x$.