III. országos magyar matematikaolimpia
XXX. EMMV
Déva, 2020. február 11–16.

IX. osztály – I. forduló

1. feladat. Legyen $A_n = \{x \in (0, +\infty) \mid x^\alpha + [x] \leq n\}$ és $B_n = \{x \in (0, +\infty) \mid [x^\alpha] + x \leq n\}$, ahol $[x]$ jelöli az x szám egész részét és $\alpha \in \mathbb{Z}$.

a) Igazold, hogy $A_n \subset B_{n+1}$, bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén!

b) Igazold, hogy $B_n \subset A_{n+1}$, bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén!

dr. Bencze Mihály, Brassó
Kocsis Attila, Déva

Megoldás.

a) Ha $x \in A_n$, akkor $x^\alpha + [x] \leq n$, ahonnan $x^\alpha + [x] + 1 \leq n + 1$.
De $[x^\alpha] \leq x^\alpha$ és $x \leq [x] + 1$, így **(2 pont)**

$$[x^\alpha] + x \leq x^\alpha + [x] + 1 \leq n + 1, \qquad \textbf{(2 pont)}$$

vagyis $x \in B_{n+1}$. **(1 pont)**

b) Ha $x \in B_n$, akkor $[x^\alpha] + x \leq n$, ahonnan $[x^\alpha] + x + 1 \leq n + 1$.
De $x^\alpha \leq [x^\alpha] + 1$ és $[x] \leq x$, így **(2 pont)**

$$x^\alpha + [x] \leq [x^\alpha] + 1 + x \leq n + 1,$$

vagyis $x \in A_{n+1}$. **(2 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

■

2. feladat. Oldd meg a valós számok halmazán az

$$1010 \cdot \left(\left(\frac{x}{a}\right)^{1010} + \left(\frac{a}{x}\right)^{1010}\right) = 2022 - \left(\left(\frac{y}{b}\right)^{2020} + \left(\frac{b}{y}\right)^{2020}\right)$$

egyenletet, ahol $a, b \in \mathbb{R}^*$. *Tóth Csongor, Szováta*

Megoldás. Az egyenlet akkor értelmezett, ha $x, y \neq 0$.

Mivel $\left(\frac{x}{a}\right)^{1010}$ és $\left(\frac{y}{b}\right)^{2020}$ pozitív, ezért

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{1010} + \left(\frac{a}{x}\right)^{1010} \geq 2 \quad \text{és} \quad \left(\frac{y}{b}\right)^{2020} + \left(\frac{b}{y}\right)^{2020} \geq 2. \qquad \textbf{(3 pont)}$$

Innen következik, hogy

$$1010 \cdot \left(\left(\frac{x}{a}\right)^{1010} + \left(\frac{a}{x}\right)^{1010}\right) \geq 2020 \quad \text{és} \quad 2022 - \left(\left(\frac{y}{b}\right)^{2020} + \left(\frac{b}{y}\right)^{2020}\right) \leq 2020. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

A megadott egyenlőség akkor és csakis akkor teljesülhet, ha

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{1010} + \left(\frac{a}{x}\right)^{1010} = 2 \quad \text{és} \quad \left(\frac{y}{b}\right)^{2020} + \left(\frac{b}{y}\right)^{2020} = 2. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Ez csak akkor lehetséges, ha

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{1010} = 1 \quad \text{és} \quad \left(\frac{y}{b}\right)^{2020} = 1,$$

innen

$$\frac{x}{a} = \pm 1, \quad \text{ahonnan} \quad x = \pm a,$$

valamint

$$\frac{y}{b} = \pm 1, \quad \text{ahonnan} \quad y = \pm b. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Következésképpen

$$M = \{(a; b), (-a; b), (a; -b), (-a, -b)\}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Hivatalból **(1 pont)**

■

3. feladat. Legyen $x_1 = 4$, $x_2 = 6$ és minden $n \geq 3$ esetén legyen x_n az a legkisebb összetett természetes szám, amely nagyobb, mint $2x_{n-1} - x_{n-2}$.

a) Határozd meg a sorozat 2020-adik tagját!

b) Igazold, hogy $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{x_k x_{k+1} x_{k+2}} < \frac{1}{1575}$.

Turdean Katalin, Zilah

Megoldás. a) Kiszámoljuk a sorozat első néhány tagját: **(1 pont)**

$$2x_2 - x_1 = 2 \cdot 6 - 4 = 8, \quad \text{ahonnan} \quad x_3 = 9 = \frac{3(3+3)}{2}$$
$$2x_3 - x_2 = 2 \cdot 9 - 6 = 12, \quad \text{ahonnan} \quad x_4 = 14 = \frac{4(4+3)}{2}$$
$$2x_4 - x_3 = 2 \cdot 14 - 9 = 19, \quad \text{ahonnan} \quad x_5 = 20 = \frac{5(5+3)}{2}$$
$$2x_5 - x_4 = 2 \cdot 20 - 14 = 26, \quad \text{ahonnan} \quad x_6 = 27 = \frac{6(6+3)}{2}$$
$$2x_6 - x_5 = 2 \cdot 27 - 20 = 34, \quad \text{ahonnan} \quad x_7 = 35 = \frac{7(7+3)}{2}.$$

Matematikai indukcióval igazoljuk, hogy $x_n = \dfrac{n(n+3)}{2}$, bármely $n \geq 3$ esetén. (**1 pont**)
A korábbi számolások alapján az állítás igaz $n \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$ esetén. Feltételezzük, hogy

$$x_k = \frac{k(k+3)}{2}, \quad \text{valamint} \quad x_{k+1} = \frac{(k+1)(k+4)}{2},$$

és igazoljuk, hogy $x_{k+2} = \dfrac{(k+2)(k+5)}{2}$.
Teljesül, hogy

$$\begin{aligned}2x_{k+1} - x_k &= 2\frac{(k+1)(k+4)}{2} - \frac{k(k+3)}{2} = \frac{2(k^2+5k+4) - (k^2+3k)}{2}\\ &= \frac{k^2+7k+8}{2} = \frac{k^2+7k+10}{2} - 1 = \frac{(k+2)(k+5)}{2} - 1.\end{aligned}$$

Mivel $(k+2)$ és $(k+5)$ közül az egyik páros, ezért $\dfrac{(k+2)(k+5)}{2}$ természetes és összetett, valamint pontosan 1-gyel nagyobb, mint $2x_{k+1} - x_k$. Azt kaptuk, hogy $x_{k+2} = \dfrac{(k+2)(k+5)}{2}$.
A matematikai indukció alapján $x_n = \dfrac{n(n+3)}{2}$, minden $n \geq 3$ esetén. Innen következik, hogy $x_{2020} = 1010 \cdot 2023$. (**3 pont**)

b) A következőket írhatjuk

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{x_k x_{k+1} x_{k+2}} &= \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{\frac{k(k+3)}{2} \cdot \frac{(k+1)(k+4)}{2} \cdot \frac{(k+2)(k+5)}{2}}\\
&= 8\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)} \qquad \textbf{(1 pont)}\\
&= \frac{8}{5}\sum_{k=3}^{n} \frac{(k+5)-k}{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)}\\
&= \frac{8}{5}\sum_{k=3}^{n} \left(\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)}\right) \qquad \textbf{(2 pont)}\\
&= \frac{8}{5}\left(\frac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} - \frac{1}{4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8} + \frac{1}{4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8} - \frac{1}{5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9} + \cdots +\right.\\
&\quad \left. + \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}\right)\\
&< \frac{8}{5} \cdot \frac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} = \frac{1}{1575}. \qquad \textbf{(1 pont)}\end{aligned}$$

Hivatalból (**1 pont**)

■

4. feladat. Jelölje O az ABC háromszög köré írt kör középpontját. Legyen $k \in (0, 1)$ és E, illetve F két olyan pont amelyre $\overrightarrow{AE} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AF} = k \cdot \overrightarrow{AC}$.

a) Igazold, hogy $AB = AC$ akkor és csakis akkor, ha létezik olyan λ nullától különböző valós szám, amelyre $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CE} = \lambda \cdot \overrightarrow{OA}$.

b) Legyen $BF \cap CE = \{P\}$. Igazold, hogy ha $\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{OA}$ és $OEPF$ négyszög paralelogramma, akkor P az ABC háromszög ortocentruma és $OEPF$ rombusz!

Betuker Enikő, Margitta
Tóth Csongor, Szováta

Megoldás. a) Legyen A' a BC oldal felezőpontja. Ekkor teljesül, hogy

$$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF},$$

ahonnan $\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}$.
Mivel $\overrightarrow{BE}=(k-1)\cdot\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{CF}=(k-1)\cdot\overrightarrow{AC}$ ezért

$$\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{BF}=(k-1)\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=2(k-1)\overrightarrow{AA'}. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

„$\Longrightarrow$" Ha $AB=AC$, akkor $AA'\perp BC$, tehát $O\in AA'$. Innen következik, hogy létezik $q\in\mathbb{R}^*$ úgy, hogy $\overrightarrow{AA'}=q\cdot\overrightarrow{OA}$, ahonnan

$$\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{BF}=2q(k-1)\cdot\overrightarrow{OA},$$

tehát $\lambda=2q(k-1)\in\mathbb{R}^*$. **(1 pont)**

„$\Longleftarrow$" Tudjuk, hogy $\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CE}=\lambda\cdot\overrightarrow{OA}$, ahol $\lambda\in\mathbb{R}^*$. Másrészt $\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CE}=2(k-1)\overrightarrow{AA'}$. Innen kapjuk, hogy $\lambda\overrightarrow{OA}=2(k-1)\overrightarrow{AA'}$, ahonnan $\overrightarrow{OA}=\frac{2(k-1)}{\lambda}\cdot\overrightarrow{AA'}$, vagyis az O, A, A' pontok kollineárisak.
Mivel $OA'\perp BC$, ezért $AA'\perp BC$, és így $AB=AC$. **(2 pont)**

b) A $\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CE}=\lambda\cdot\overrightarrow{OA}$ összefüggésből $\lambda=1$ esetén kapjuk a $\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{OA}$ egyenlőséget, tehát $AB=AC$. Másrészt teljesül, hogy

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CE}&=\overrightarrow{OA}\\
\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OE}&=\overrightarrow{OA}\\
\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OE}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\\
\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OE}&=\overrightarrow{OH},
\end{aligned} \qquad \textbf{(2 pont)}$$

ahol H az ABC háromszög ortocentruma.

Mivel $OEPF$ paralelogramma, ezért $\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OP}$. Azt kaptuk, hogy $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OP}$, ahonnan $P=H$. **(1 pont)**

Mivel $AB=AC$, ezért $OE=OF$, tehát $OEPF$ rombusz. **(1 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

■