# III. országos magyar matematikaolimpia
# XXX. EMMV
**Déva, 2020. február 11–16.**

## VII. osztály

### 1. feladat.

a) Határozd meg az $n \in \mathbb{N}^*$ értékét úgy, hogy $A = \dfrac{2020}{1\cdot 3} + \dfrac{2020}{3\cdot 5} + \cdots + \dfrac{2020}{(2n-1)(2n+1)}$ természetes szám legyen!

b) Igazold, hogy $\sqrt{(2^{2020}+3^{2019}+4^{2020})^{2020}+2021}$ irracionális szám!

c) Mutasd ki, hogy $\sqrt{2019\cdot 2020 + \sqrt{2019\cdot 2020 + \sqrt{2019\cdot 2020}}} < 2020$.

*Păcurar Mária, Temesvár*

*Megoldás.* a) Mivel
$$\frac{2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1},$$
minden $k \in \mathbb{N}^*$ esetén, ezért
$$\begin{aligned} A &= 1010\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \\ &= 1010\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = 1010 - \frac{1010}{2n+1} \end{aligned} \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Az $A$ akkor és csak akkor természetes szám, ha $2n+1 \mid 1010$. **(1 pont)**
Mivel $2n+1$ páratlan, így $2n+1 \mid 505$, vagyis
$$2n+1 \in \{1, 5, 101, 505\} \quad \text{és} \quad n \in \{2, 50, 252\}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

b) Legyen $B = (2^{2020}+3^{2019}+4^{2020})^{2020}+2021$. Jelölje $\mathrm{u}(B)$ a $B$ szám utolsó számjegyét. Ekkor
$$\begin{aligned} \mathrm{u}(B) &= \mathrm{u}\left((6+7+6)^{2020}+2021\right) && \textbf{(1 pont)} \\ &= \mathrm{u}(9^{2020}+2021) = 1+1 = 2. && \textbf{(1 pont)} \end{aligned}$$

Mivel $\mathrm{u}(B) = 2$, így $B$ nem négyzetszám, ezért $\sqrt{B}$ irracionális szám. **(1 pont)**

c) Teljesül, hogy
$$\sqrt{2019\cdot 2020} < \sqrt{2020\cdot 2020} = 2020. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Innen következik, hogy

$$\sqrt{2019\cdot 2020+\sqrt{2019\cdot 2020+\sqrt{2019\cdot 2020}}}<\sqrt{2019\cdot 2020+\sqrt{2019\cdot 2020+2020}}$$
$$=\sqrt{2019\cdot 2020+\sqrt{2020\cdot 2020}} \qquad (\textbf{1 pont})$$
$$=\sqrt{2019\cdot 2020+2020}=2020. \qquad (\textbf{1 pont})$$

Hivatalból (**1 pont**)

■

**2. feladat.**

a) Az $x\neq -5$, $y\neq -7$ és $z\neq -9$ racionális számokra fennáll a következő aránysor:

$$\frac{x-5}{x+5}=\frac{y-3}{y+7}=\frac{z-1}{z+9}.$$

Számítsd ki az $x$, $y$ és $z$ értékét, ha $x+y+z=69$.

b) Az $x\neq -5$, $y\neq -7$ és $z\neq -9$ racionális számokra fennáll a következő egyenlőség:

$$\frac{2020}{x+5}+\frac{2020}{y+7}+\frac{2020}{z+9}=202.$$

Számítsd ki az $S=\dfrac{x-5}{x+5}+\dfrac{y-3}{y+7}+\dfrac{z-1}{z+9}$ összeg értékét!

*Simon József, Csíkszereda*

*Megoldás.*

a) Legyen

$$\frac{x-5}{x+5}=\frac{y-3}{y+7}=\frac{z-1}{z+9}=k.$$

Mivel $\dfrac{x-5}{x+5}=k$, ezért $x=\dfrac{5k+5}{1-k}$, ahol $k\neq 1$. (**1 pont**)
Hasonlóan

$$y=\frac{7k+3}{1-k}, k\neq 1 \quad \text{és} \quad z=\frac{9k+1}{1-k}, k\neq 1. \qquad (\textbf{1 pont})$$

Az $x+y+z=69$ egyenletbe behelyettesítve a fenti kifejezéseket kapjuk, hogy

$$\frac{5k+5}{1-k}+\frac{7k+3}{1-k}+\frac{9k+1}{1-k}=69,$$

ahonnan $21k+9=69-69k$, ahonnan $k=\frac{2}{3}$. (**1 pont**)
A keresett számok tehát $x=25$, $y=23$ és $z=21$ (**1 pont**)

b) Teljesül, hogy

$$S = \frac{x+5-10}{x+5} + \frac{y+7-10}{y+7} + \frac{z+9-10}{z+9} = 3 - \frac{10}{x+5} - \frac{10}{y+7} - \frac{10}{z+9}. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

A

$$\frac{2020}{x+5} + \frac{2020}{y+7} + \frac{2020}{z+9} = 202$$

összefüggés mindkét oldalát osztva 202-vel azt kapjuk, hogy

$$\frac{10}{x+5} + \frac{10}{y+7} + \frac{10}{z+9} = 1, \qquad \textbf{(2 pont)}$$

ahonnan $S = 3 - 1 = 2$. **(1 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

■

**Megjegyzés.** A feladat a) alpontja a következő módszerrel is megoldható.

Ha a megadott törtek számlálóiból kivonjuk a nevezőjüket, majd az aránysort szorozzuk −1-gyel, akkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{10}{x+5} = \frac{10}{y+7} = \frac{10}{z+9}. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Innen következik, hogy

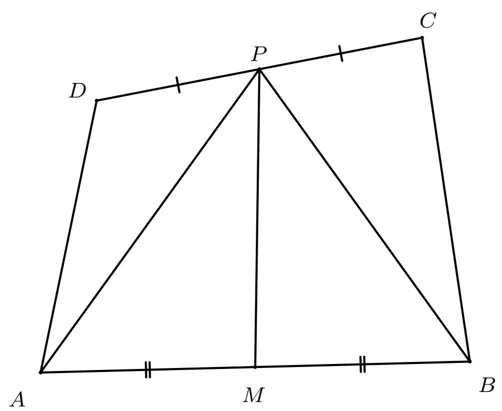
$$\frac{10}{x+5} = \frac{10}{y+7} = \frac{10}{z+9} = \frac{10+10+10}{x+y+z+21} = \frac{30}{90} = \frac{10}{30}, \qquad \textbf{(1 pont)}$$

ahonnan $x = 25$, $y = 23$ és $z = 21$. **(1 pont)**

**3. feladat.** Az $ABCD$ konvex négyszögben legyen $M$ és $P$ az $AB$, illetve $CD$ oldal felezőpontja. Igazold, hogy $AB \parallel CD$ akkor és csak akkor, ha $T_{AMPD} \cdot T_{MPCB} = \dfrac{T^2_{ABCD}}{4}$.

*Koczinger Éva, Szatmárnémeti*

*Megoldás.* A megoldáshoz tekintsük a következő ábrát.



„$\Longrightarrow$” Mivel $AB \parallel CD$, ezért az $AMPD$ és $MBCP$ négyszögek trapézok, vagy paralelogrammák, és magasságaik egyenlőek.

Teljesül továbbá, hogy $AM = MB$ és $DP = PC$, és így $T_{AMPD} = T_{MPCB}$. **(1 pont)**
Azt kaptuk, hogy $T_{AMPD} = T_{MPCB} = \frac{1}{2}T_{ABCD}$, ahonnan

$$T_{AMPD} \cdot T_{MPCB} = \left(\frac{1}{2}T_{ABCD}\right)^2 = \frac{T_{ABCD}^2}{4}. \quad \textbf{(1 pont)}$$

„$\Longleftarrow$” A $T_{AMPD}$ és $T_{MPCB}$ mennyiségekre alkalmazzuk a mértani és számtani közepek közötti egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{T_{AMPD} \cdot T_{MPCB}} \leq \frac{T_{AMPD} + T_{MPCB}}{2}, \quad \textbf{(2 pont)}$$

ahonnan

$$T_{AMPD} \cdot T_{MPCB} \leq \frac{T_{ABCD}^2}{4}. \quad \textbf{(1 pont)}$$

A fenti egyenlőtlenségben a feltétel alapján egyenlőség áll fenn, ami pontosan akkor teljesül, ha $T_{AMPD} = T_{MPCB}$. **(1 pont)**
A $PAB$ háromszögben $PM$ oldalfelező, így $T_{PAM} = T_{PBM}$. **(1 pont)**
Innen következik, hogy $T_{ADP} = T_{BCP}$. Ebben a két háromszögben $DP = CP$, így az $A$-ból, illetve a $B$-ből húzott magasságok egyenlőek. **(1 pont)**
Innen pedig $AB \parallel CD$. **(1 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

■

**4. feladat.** Adott az $ABCD$ négyzet. Legyen $\mathcal{C}_1$ a $B$ középpontú $BA$ sugarú kör, valamint $\mathcal{C}_2$ a $D$ középpontú $DA$ sugarú kör. Egy az $A$ ponton átmenő tetszőleges egyenes a $\mathcal{C}_1$ és $\mathcal{C}_2$ köröket az $E$ és $F$ pontokban metszi. A $C$ pontból az $EF$ egyenesre húzott merőleges egyenes az $EF$-et $M$-ben, a $\mathcal{C}_1$ kört másodszor $P$-ben metszi. A $PA$ egyenes a $CF$ egyenest $N$-ben, a $\mathcal{C}_2$ kört másodszor $R$-ben metszi. Igazold, hogy:

a) az $EFC$ egyenlő szárú derékszögű háromszög;

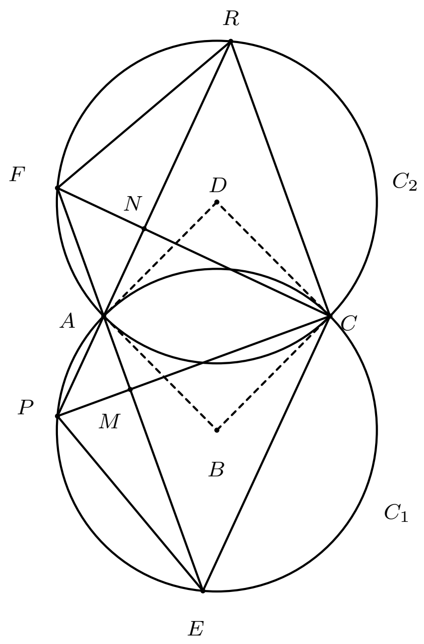
b) a $CPR$ egyenlő szárú derékszögű háromszög;

c) az $AECR$ négyszög paralelogramma;

d) $EP = FR$.

*Simon József, Csíkszereda*

*Megoldás.* A megoldáshoz tekintsük a következő ábrát.




a) A $\mathcal{C}_1$ körben $\widehat{ABC} = 90°$, vagyis $\overset{\frown}{AC} = 90°$, ahonnan $\widehat{AEC} = \frac{1}{2} \cdot \overset{\frown}{AC} = 45°$. (**1 pont**)

A $\mathcal{C}_2$ körben $\widehat{ADC} = 90°$, vagyis $\overset{\frown}{AC} = 90°$, ahonnan $\widehat{AFC} = \frac{1}{2} \cdot \overset{\frown}{AC} = 45°$. (**1 pont**)

Az előző összefüggésekből következik, hogy az $EFC$ háromszögben $\widehat{ECF} = 90°$, tehát az $EFC$ háromszög egyenlő szárú és derékszögű. (**0,5 pont**)

b) Az $APC$ háromszögben $\widehat{APC} = \frac{1}{2} \cdot \overset{\frown}{AC} = 45°$. (**1 pont**)

Az $ARC$ háromszögben $\widehat{ARC} = \frac{1}{2} \cdot \overset{\frown}{AC} = 45°$. (**1 pont**)

Az előző összefüggések alapján a $CPR$ háromszögben $\widehat{PCR} = 90°$, így a $CPR$ háromszög egyenlő szárú és derékszögű. (**0.5 pont**)

c) Mivel $AE \perp CP$ és $CR \perp CP$, ezért $AE \parallel CR$. (**1 pont**)

Mivel $EC \perp CF$ és $AR \perp CF$ ezért $EC \parallel AR$. (**0.5 pont**)

Az előző összefüggések alapján az $AECR$ négyszög paralelogramma. (**0.5 pont**)

d) A $CP$ egyenes az $EF$ szakasz felezőmerőlegese, így $EP = FP$. (**1 pont**)

A $CF$ egyenes a $PR$ szakasz felezőmerőlegese, így $FP = FR$. (**0.5 pont**)

Az előző összefüggések alapján $EP = FR$. (**0.5 pont**)

Hivatalból (**1 pont**)

■

**Megjegyzés.** A feladat d) alpontja a következőképpen is megoldható: mivel $\widehat{ECP} = \widehat{RCF} = 45°$, ezért $\overset{\frown}{EP} = \overset{\frown}{FR}$ és így $EP = FR$.