III. országos magyar matematikaolimpia
XXX. EMMV
Déva, 2020. február 11–16.

VI. osztály

1. feladat. A $\mathcal{C}(O; R)$ körön felvesszük az $A_1, A_2, \ldots, A_{15}$ pontokat ebben a sorrendben. Tudjuk, hogy $\widehat{A_1A_2} = 5°$, $\widehat{A_2A_3} = 8°$, $\widehat{A_3A_4} = 11°$, $\ldots$, $\widehat{A_{14}A_{15}} = 44°$ (mindegyik körív az előzőhöz képest 3°-kal nagyobb).

a) Igazold, hogy A_2 és A_{11} átmérősen ellentett pontok!

b) Számítsd ki az $\widehat{A_3OA_{12}}$ tulajdonképpeni szög mértékét!

c) Legyen $X, Y \in \mathcal{C}$ úgy, hogy OX és OY az A_2OA_5, illetve az A_5OA_{11} szög szögfelezője. Ha d az Y ponton átmenő, az OX-el párhuzamos egyenes, akkor igazold, hogy d a kör érintője!

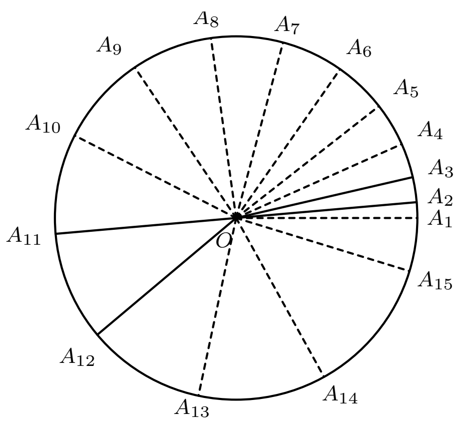
Zajzon Csaba, Barót
Mátyás Ildikó Beáta, Szatmárnémeti
Szász Szilárd, Marosszentkirály

Megoldás.

a) Írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\widehat{A_2OA_{11}} &= \widehat{A_2OA_3} + \widehat{A_3OA_4} + \cdots + \widehat{A_{10}OA_{11}} && \textbf{(1 pont)}\\
&= 8° + (8° + 3°) + \cdots + (8° + 8 \cdot 3°)\\
&= 9 \cdot 8° + (1 + 2 + \cdots + 8) \cdot 3°, && \textbf{(1 pont)}\\
&= 72° + 108° = 180°
\end{aligned}$$

vagyis A_2 és A_{11} átmérősen ellentett pontok. **(1 pont)**



b) Az $\widehat{A_3OA_{12}}$ szöget felbontjuk a következő módon:

$$\begin{aligned}\widehat{A_3OA_{12}} &= \widehat{A_2OA_{11}} - \widehat{A_2OA_3} + \widehat{A_{11}OA_{12}}\\ &= 180^\circ - 8^\circ + 35^\circ = 207^\circ > 180^\circ,\end{aligned} \qquad (\mathbf{1\ pont})$$

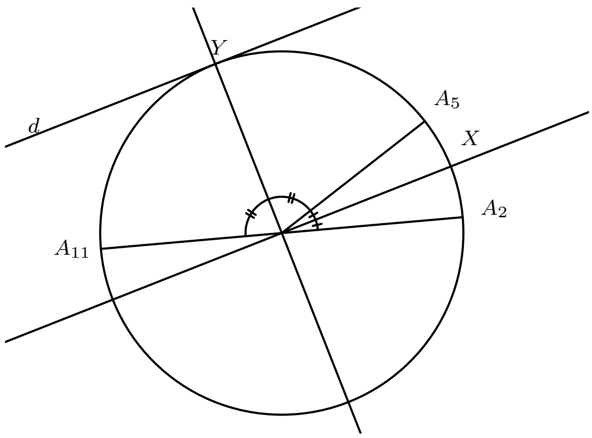
ami nem a tulajdonképpeni szög. (**1 pont**)

Innen következik, hogy a tulajdonképpeni szög $\widehat{A_3OA_{12}} = 360^\circ - 207^\circ = 153^\circ$. (**1 pont**)

c) Az $\widehat{A_2OA_5}$ és $\widehat{A_5OA_{11}}$ szögek kiegészítő szögek, ahonnan

$$\widehat{XOY} = \frac{\widehat{A_2OA_5}}{2} + \frac{\widehat{A_5OA_{11}}}{2} = 90^\circ. \qquad (\mathbf{1\ pont})$$

Mivel az $\widehat{XOY}$ derékszög és $d \parallel OX$, ezért $d \perp OY$. (**1 pont**)
Így az OY szakasz hossza az O pont és a d egyenes közötti távolság. Mivel az OY szakasz a kör sugara, ezért d a kör érintője. (**1 pont**)



Hivatalból (**1 pont**)

■

2. feladat. Adottak az $A = \left\{ n \in \mathbb{N} \,\middle|\, \frac{4n+7}{3n+4} \text{ reducibilis} \right\}$ és $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = p^2,\ p \in \mathbb{N}\}$ halmazok.

a) Határozd meg az A halmaz elemeit!

b) Igazold, hogy az A és B diszjunkt halmazok!

Zajzon Csaba, Barót
Mátyás Ildikó Beáta, Szatmárnémeti
Szász Szilárd, Marosszentkirály

Megoldás. a) Legyen $d = (4n+7, 3n+4)$ a $4n+7$ és $3n+4$ legnagyobb közös osztója. (**1 pont**)

Mivel $d \mid (4n+7)$ és $d \mid (4n+3)$, ezért d osztja a $3 \cdot (4n+7) - 4 \cdot (3n+4) = 5$ számot, ahonnan $d = 1$ vagy $d = 5$. Mivel $\dfrac{4n+7}{3n+4}$ reducibilis, ezért d nem lehet 1, tehát $d = 5$. (**2 pont**)

Mivel $5 \mid (4n+7)$ és $5 \mid (3n+4)$, így 5 osztja a $(4n+7) - (3n+4) = n+3$ számot, tehát $n+3 = 5k$, vagyis $n = 5k-3$ alakú. (**2 pont**)

Összegezve, $A = \{5k-3 \mid k \in \mathbb{N}^*\} = \{2, 7, 12, 17, \ldots\}$. (**1 pont**)

b) Az $n \in A$ szám $5k-3$ alakú, ezért az n utolsó számjegye 2 vagy 7, (**1 pont**)
ezért az n nem négyzetszám. (**1 pont**)
Mivel a B halmaz elemei négyzetszámok, ezért $A \cap B = \emptyset$, vagyis az A és B halmazok diszjunktak. (**1 pont**)

Hivatalból (**1 pont**)

■

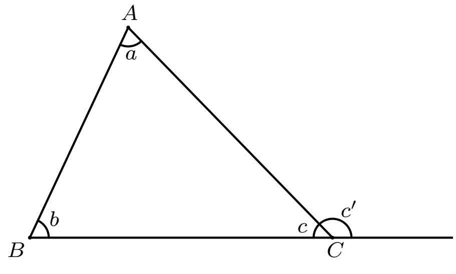
3. feladat. Adott az ABC háromszög, ahol az A és B szögek mértékei, valamint a C külső szög mértéke fordítottan arányosak a 6,6, az 5,5 és az x számokkal.

a) Határozd meg az x számot!

b) Határozd meg a háromszög szögeinek mértékét, ha a C szög mértéke 4°-kal nagyobb a B szög mértékének 1,1-szeresénél!

Zajzon Csaba, Barót

Megoldás. Jelöljük az A, B és C belső szögek mértékeit a, b és c betűkkel, valamint a C külső szög mértékét c'-vel.



a) Az a, b és c' szögmértékek fordítottan arányosak a 6,6, az 5,5 és az x számokkal, ezért

$$a \cdot 6{,}6 = b \cdot 5{,}5 = c' \cdot x,$$

vagyis az a, b és c' szögmértékek egyenesen arányosak az $\dfrac{1}{6{,}6}$, az $\dfrac{1}{5{,}5}$ és az $\dfrac{1}{x}$ számokkal:

$$\frac{a}{\frac{1}{6{,}6}} = \frac{b}{\frac{1}{5{,}5}} = \frac{c'}{\frac{1}{x}}.$$ (**1 pont**)

Az aránypárok származtatásával kapjuk, hogy

$$\frac{a}{\frac{1}{6{,}6}} = \frac{b}{\frac{1}{5{,}5}} = \frac{a+b}{\frac{1}{6{,}6}+\frac{1}{5{,}5}} = \frac{c'}{\frac{1}{x}}. \tag{1}$$

Az ABC háromszögben az A és a B belső szögek mértékeinek összege egyenlő a C külső szögének mértékével:

$$a + b = c'.$$ **(2 pont)**

Ezt felhasználva az $\frac{a+b}{\frac{1}{6{,}6}+\frac{1}{5{,}5}} = \frac{c'}{\frac{1}{x}}$ aránypárban kapjuk, hogy $\frac{c'}{\frac{1}{6{,}6}+\frac{1}{5{,}5}} = \frac{c'}{\frac{1}{x}}$, ahonnan $\frac{1}{x} = \frac{1}{6{,}6}+\frac{1}{5{,}5}$. Közös nevezőre hozunk, a jobb oldalon az első törtet bővítve 5-tel és a másodikat pedig 6-tal:

$$\frac{1}{x} = \frac{^{5)}1}{6{,}6} + \frac{^{6)}1}{5{,}5} = \frac{5}{33} + \frac{6}{33} = \frac{11}{33}^{(11} = \frac{1}{3}.$$

Innen kapjuk, hogy $x = 3$. **(1 pont)**

b) A megadott feltételekből a C belső szögének c mértékére a

$$c = 1{,}1 \cdot b + 4^\circ \tag{2}$$

összefüggés írható fel. **(1 pont)**

Az ABC háromszög belső szögeinek összege $a + b + c = 180^\circ$, ahova behelyettesítjük a (2)-es összefüggésben kifejezett c-t és így kapjuk, hogy $a + b + 1{,}1 \cdot b + 4^\circ = 180^\circ$, ahonnan

$$a + 2{,}1 \cdot b = 176^\circ. \tag{3}$$

(1 pont)

Az első alpontban felírt $\frac{a}{\frac{1}{6{,}6}} = \frac{b}{\frac{1}{5{,}5}}$ aránypárban a második arányt bővítjük 2,1-del $\frac{a}{\frac{1}{6{,}6}} = \frac{^{2{,}1)}b}{\frac{1}{5{,}5}}$ és kapjuk, hogy $\frac{a}{\frac{1}{6{,}6}} = \frac{2{,}1 \cdot b}{\frac{2{,}1}{5{,}5}}$. A számlálókat és nevezőket összeadva származtatjuk az aránypárt, majd a nevezőben közös nevezőre hozunk és a kapott számlálóban felhasználjuk a (3)-as összefüggést:

$$\frac{a}{\frac{1}{6{,}6}} = \frac{b}{\frac{1}{5{,}5}} = \frac{a + 2{,}1 \cdot b}{\frac{^{5)}1}{6{,}6} + \frac{^{6)}2{,}1}{5{,}5}} = \frac{a + 2{,}1 \cdot b}{\frac{5}{33} + \frac{6 \cdot 2{,}1}{33}} = \frac{a + 2{,}1 \cdot b}{\frac{17{,}6}{33}} = \frac{176^\circ}{\frac{17{,}6}{33}} = 330^\circ.$$ **(1 pont)**

Innen kapjuk az $\frac{a}{\frac{1}{6{,}6}} = 330^\circ$ és $\frac{b}{\frac{1}{5{,}5}} = 330^\circ$ összefüggéseket, ahonnan $a = 50^\circ$ és $b = 60^\circ$. **(1 pont)**

Végül a (2)-es összefüggésbe behelyettesítve a $b = 60^\circ$-ot kapjuk, hogy

$$c = 60^\circ \cdot 1{,}1 + 4^\circ = 66^\circ + 4^\circ = 70^\circ.$$ **(1 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

■

4. feladat. Egy iskola VI. osztályaiban összesen 50-nél kevesebb tanuló van. Egy felmérés után a következőket tudtuk meg:

- nincs olyan hónap, amelyben ne ünnepelné születésnapját legalább 3 tanuló;
- a tanulók 50%-a lány;
- 6-szor kevesebb szemüveget viselő tanuló van, mint szemüveget nem viselő.

a) Hány VI. osztályos tanuló van?

b) A tanulók között szétosztottunk 902 csokit, mindenki kapott legalább egyet. Igazold, hogy létezik két olyan tanuló, aki ugyanannyi csokit kapott!

Zajzon Csaba, Barót
Mátyás Ildikó Beáta, Szatmárnémeti
Szász Szilárd, Marosszentkirály

Megoldás. a) Legyen x a tanulók száma. Az első feltétel alapján

$$3 \cdot 12 \leq x < 50,$$
$$36 \leq x < 50.$$
(**2 pont**)

A második feltétel alapján $x \,\vdots\, 2$. (**1 pont**)

Az harmadik feltétel alapján $x \,\vdots\, 7$. (**1 pont**)

Az utóbbi két összefüggés alapján az x szám a 2 és 7 többszöröse, tehát $x \,\vdots\, 14$. (**1 pont**)
A fentiekből következik, hogy $x = 42$. (**1 pont**)

b) Ha mindegyik tanuló különböző darabszámú csokit kapna, akkor

$$1 + 2 + \cdots + 42 = 903$$

csokit kellene szétosztani. (**2 pont**)
Mivel 902 csokit osztottak szét, ezért legalább 2 tanuló ugyanannyi csokit kell kapjon. (**1 pont**)

Hivatalból (**1 pont**)

■