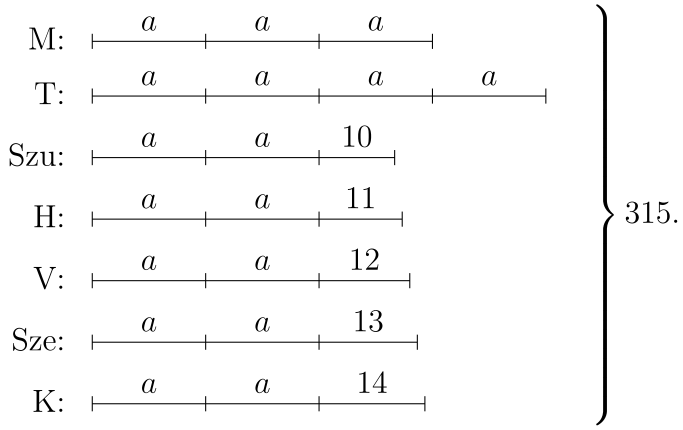
III. országos magyar matematikaolimpia
XXX. EMMV
Déva, 2020. február 11–16.

V. osztály

1. feladat. Tudor magassága $\frac{4}{3}$-a Morgó magasságának, Szundi magassága pedig 10 cm-rel több, mint Morgó magasságának a $\frac{2}{3}$-a. Szundi, Hapci, Vidor, Szende és Kuka magasságai egymás utáni természetes számok ebben a sorrendben. Ha a hét törpe átlagmagassága 45 cm, határozd meg a magasságukat külön-külön!

Nagy Örs, Kolozsvár
Vészi Gabriella, Marosvásárhely

Megoldás. A 7 törpe átlagmagassága 45 cm, így magasságaiknak összege $45 \cdot 7 = 315$ cm. (**1 pont**)
Szakaszos ábrázolás módszerével kapjuk, hogy



(**3 pont**)

Innen következik, hogy

$$a = \frac{315 - (10 + 11 + 12 + 13 + 14)}{17} = \frac{255}{17} = 15, \qquad (\textbf{3 pont})$$

ahonnan a törpék magassága rendre:

M: 45 cm; T: 60 cm; Szu: 40 cm; H: 41 cm; V: 42 cm; Sze: 43 cm; K: 44 cm. (**2 pont**)

Hivatalból (**1 pont**)

■

2. feladat. Határozd meg azokat az x és y nullától különböző természetes számokat, amelyekre

$$7^{x+1} + 19^{y-1} - 382 = 2020.$$

Nagy Örs, Kolozsvár
Vészi Gabriella, Marosvásárhely

Első megoldás. A megadott összefüggés alapján

$$7^{x+1} + 19^{y-1} = 2402, \quad \text{minden } x, y \geq 1 \text{ esetén.} \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Mivel $7^2 = 49$, $7^3 = 343$, $7^4 = 2401$ és $7^5 > 2402$, (**1 pont**)
következik, hogy az $(x + 1)$ szám 2, 3 vagy 4 lehet, tehát az x szám 1, 2 vagy 3 lehet. (**1 pont**)

Ha $x = 1$, akkor behelyettesítéssel a

$$49 + 19^{y-1} = 2402$$

összefüggést kapjuk, ahonnan következik, hogy $19^{y-1} = 2353$. Ez viszont lehetetlen, mert a 19 bármilyen természetes hatványának az utolsó számjegye 1-es vagy 9-es, tehát nem lehet 3-as. (**2 pont**)

Ha $x = 2$, akkor behelyettesítéssel a

$$343 + 19^{y-1} = 2402$$

összefüggést kapjuk, ahonnan következik, hogy $19^{y-1} = 2059$. Mivel $19^2 = 361 < 2059$, valamint $19^3 = 6859 > 2059$, ez az eset is lehetetlen. (**2 pont**)

Ha $x = 3$, akkor behelyettesítéssel a

$$2401 + 19^{y-1} = 2402$$

összefüggést kapjuk, ahonnan következik, hogy $19^{y-1} = 1$. Ez csak akkor lehetséges, ha $y - 1 = 0$, vagyis ha $y = 1$.

Tehát $x = 3$ és $y = 1$ az egyetlen megoldás. (**2 pont**)
Hivatalból (**1 pont**)

■

Második megoldás. A megadott összefüggés alapján

$$7^{x+1} + 19^{y-1} = 2402, \quad \text{minden } x, y \geq 1 \text{ esetén.} \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Mivel $19^0 = 1$, $19^1 = 19$, $19^2 = 361$ és $19^3 = 6859 > 2402$, (**1 pont**)
következik, hogy az $(y - 1)$ szám 0, 1, vagy 2 lehet, tehát az y szám 1, 2 vagy 3. (**1 pont**)

Ha $y = 1$, akkor behelyettesítéssel a

$$7^{x+1} + 1 = 2402$$

összefüggést kapjuk, ahonnan következik, hogy $7^{x+1} = 2401$. Ez viszont azt jelenti, hogy $x + 1 = 4$, vagyis $x = 3$. (**2 pont**)

Ha $y = 2$, akkor behelyettesítéssel a

$$7^{x+1} + 19 = 2402$$

összefüggést kapjuk, ahonnan következik, hogy $7^{x+1} = 2383$. Mivel $7^3 = 343 < 2383$, valamint $7^4 = 2402 > 2383$, ez az eset lehetetlen. (**2 pont**)

Ha $y = 3$, akkor behelyettesítéssel a

$$7^{x+1} + 361 = 2402$$

összefüggést kapjuk, ahonnan következik, hogy $7^{x+1} = 2041$. Mivel $7^3 = 343 < 2041$, valamint $7^4 = 2402 > 2041$, ez az eset is lehetetlen.

Tehát $x = 3$ és $y = 1$ az egyetlen megoldás. **(2 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

■

3. feladat. Az Óperenciás-tenger Nevenincs szigetéről egy hajó indul a Kincsek szigetére. Két óra múlva néhány kalóz motorcsónakkal a hajó után indul. Újabb négy óra múlva a kalózok utolérik és megelőzik a hajót, így egy órával hamarabb érnek a Kincsek szigetére. Hány óra alatt tette meg a két sziget közötti utat a hajó, illetve a motorcsónak külön-külön, ha végig ugyanazon az útvonalon haladtak és végig állandó volt a sebességük?

Nagy Örs, Kolozsvár
Vészi Gabriella, Marosvásárhely

Megoldás. A találkozás pillanatáig a hajó 6 órát, míg a motorcsónak 4 órát haladt a vízen. **(2 pont)**

Ezért ugyanazt a távot a hajó 3 óra alatt, míg a motorcsónak 2 óra alatt teszi meg. **(2 pont)**

Mivel a motorcsónak 1 órával hamarabb ért a célba, ezért a csónak még 2 órát és a hajó még 3 órát haladt. **(3 pont)**

Így összesen a hajó $6 + 3 = 9$ óra alatt, míg a motorcsónak $4 + 2 = 6$ óra alatt tette meg a távot. **(2 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

■

4. feladat. Egy 3×3-as táblázatot úgy töltünk ki egymástól különböző természetes számokkal, hogy minden sor, oszlop és átló mentén a középső szám négyzete egyenlő legyen a másik két szám szorzatával.

a) Töltsd ki a táblázatot, ha a középső négyzetben 6-os van!

	6	

b) Kitölthető-e a táblázat, ha a 6-os helyett a középső négyzetben egy prímszám szerepel?

c) Ha a középső négyzetben tetszőleges összetett szám van, akkor kitölthető-e a táblázat?

Simon József, Csíkszereda

Megoldás. a) A középső 6-os szám négyzete a következő módokon bontható fel két szám szorzatára:

$$6^2 = 36 = 1 \cdot 36 = 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 4 \cdot 9. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Ezért az átlókra, a középső oszlopra és sorra az

1 és 36, 2 és 18, 3 és 12, 4 és 9

számpárok kerülnek a 6-os mellé. Az 1-es szám csak a sarokban szerepelhet, a vele szemben lévő sarkokba a 36-os kerül. Írjuk az 1-est például a jobb alsó, míg a 36-ost a bal felső sarokba.

36		
	6	
		1

A 2-est és a 3-ast nem írhatjuk a maradék sarkokba, mert $1 \cdot 2$ és $1 \cdot 3$ nem négyzetszámok.

Ha a 2-es a 36-os mellett szerepel, akkor a 2-es másik oldalán a $\frac{36}{2^2} = 9$-es számnak kell szerepelnie. Emiatt a 6-ra nézve a 9-essel szembe a 4-est kell írni. De ekkor a 6-ra nézve a 2-essel szembe is 2-est kellene írnunk, mert $2^2 = 1 \cdot 4$, ami nem megengedett. Tehát a 2-es nem szerepelhet a 36-os mellett.

36		4
2	6	**2**
9		1

36	2	9
	6	
4	**2**	1

Hasonlóan az előző esethez, ha a 3-as a 36-os mellett szerepel, akkor a 3-as másik oldalán a $\frac{36}{3^2} = 4$ számnak kell szerepelnie. Emiatt a 6-ra nézve a 4-essel szembe a 9-est kell írni. De ekkor a 6-ra nézve a 3-assal szembe is 3-ast kellene írnunk, mert $3^2 = 1 \cdot 9$, ami nem megengedett. Tehát a 3-as sem szereplhet a 36-os mellett.

36		9
3	6	**3**
4		1

36	3	4
	6	
9	**3**	1

Arra jutottunk, hogy a 2-es is és a 3-as is az 1-es mellett kell legyen. Emiatt a 2-es melletti másik sarokba a 4-es kerül, míg a 3-as melletti másik sarokba a 9-es. (**2 pont**)

A 4-es és a 36-os közé a 12-es kerül, mert $4 \cdot 36 = 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 = 12^2$. A 9-es és a 36-os közé a 18-as kerül, mert $9 \cdot 36 = 9 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 9 = 18^2$. Így kapjuk az alábbi kitöltést. (**1 pont**)

36	18	9
12	6	3
4	2	1

(1)

Megjegyzés. Az 1-est írhatjuk más sarokba is, illetve a 2-es és a 3-as is kerülhet más sorrendben az 1-es mellé, így még 7 fajta kitöltése van a táblázatnak.

36	12	4
18	6	2
9	3	1

1	2	4
3	6	12
9	18	36

1	3	9
2	6	18
4	12	36

4	12	36
2	6	18
1	3	9

9	18	36
3	6	12
1	2	4

9	3	1
18	6	2
36	12	4

4	2	1
12	6	3
36	18	9

b) Egy p prímszámot nem írhatunk a 6-os helyére, mert p^2 csak egyféleképpen bontható fel úgy, hogy ne ismétlődjenek a számok: $p^2 = 1 \cdot p$. Így legfeljebb csak egy átlót, sort vagy oszlopot tudunk kitölteni anélkül, hogy számokat ismételnénk. (**2 pont**)

c) A 6 helyett egy $a \cdot b$ ($a \neq b$, $a > 1$, $b > 1$) összetett számot írva a táblázat a következőképpen tölthető ki:

36	18	9
12	6	3
4	2	1

$\longrightarrow$

$2^2 \cdot 3^2$	$2 \cdot 3^2$	3^2
$2^2 \cdot 3$	$2 \cdot 3$	3
2^2	2	1

$\longrightarrow$

$a^2 \cdot b^2$	$a \cdot b^2$	b^2
$a^2 \cdot b$	$a \cdot b$	b
a^2	a	1

(**2 pont**)

Hivatalból (**1 pont**)

■