III. országos magyar matematikaolimpia
XXX. EMMV
Déva, 2020. február 11–16.

IX. osztály – II. forduló

1. feladat. A valós számok halmazán oldd meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases}(x^2+2)(y^2+2)=2(y+z)^2\\(y^2+2)(z^2+2)=2(z+x)^2\\(z^2+2)(x^2+2)=2(x+y)^2\end{cases}.$$

dr. Bencze Mihály, Brassó

Első megoldás. Összeadva a három egyenletet kapjuk, hogy

$$(x^2+2)(y^2+2)+(y^2+2)(z^2+2)+(z^2+2)(x^2+2)-2(y+z)^2-2(z+x)^2-2(x+y)^2=0,$$

(1 pont)

$$4x^2+4y^2+4z^2+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+12-2(2x^2+2y^2+2z^2+2xy+2yz+2zx)=0,$$
$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2-4xy-4yz-4zx+12=0,$$
$$(xy-2)^2+(yz-2)^2+(zx-2)^2=0, \qquad \textbf{(2 pont)}$$

ahonnan $xy=2$, $yz=2$, $zx=2$. **(1 pont)**
Ezeket összeszorozva $x^2y^2z^2=8$, ahonnan $xyz=\pm 2\sqrt{2}$. **(1 pont)**
Ha $xyz=-2\sqrt{2}$, akkor $z=\dfrac{xyz}{xy}=\dfrac{-2\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$ és hasonlóan $x=-\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$. **(2 pont)**
Ha $xyz=2\sqrt{2}$, akkor $z=\dfrac{xyz}{xy}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$ és hasonlóan $x=\sqrt{2}$, $y=\sqrt{2}$.
Összegezve, az egyenletrendszer lehetséges megoldásai $(x,y,z)=(-\sqrt{2},-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ és $(x,y,z)=(\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{2})$. **(1 pont)**
Visszahelyettesítve a kapott két számhármast az egyenletrendszerbe, azt kapjuk, hogy azok valóban megoldások. **(1 pont)**
Hivatalból **(1 pont)**

■

Második megoldás. A Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség alapján bármely $x,y,z\in\mathbb{R}$ esetén

$$(x^2+2)(y^2+2)\geq(x\sqrt{2}+y\sqrt{2})^2=2(x+y)^2,$$
$$(y^2+2)(z^2+2)\geq(y\sqrt{2}+z\sqrt{2})^2=2(y+z)^2,$$
$$(z^2+2)(x^2+2)\geq(z\sqrt{2}+x\sqrt{2})^2=2(z+x)^2.$$

Ezeket az egyenlőtlenségeket összeszorozva és felhasználva az egyenletrendszert következik, hogy mindhárom fenti egyenlőtlenségben egyenlőség áll fenn. Innen következik, hogy

$$\frac{x}{y}=\frac{y}{z}=\frac{z}{x}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}},$$

ahonnan $x = y = z$. Az első egyenletből kapjuk, hogy

$$(x^2 + 2)^2 = 2(2x)^2,$$

amelynek megoldásai $x = \pm\sqrt{2}$, tehát a rendszer lehetséges megoldásai $(x, y, z) = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ és $(x, y, z) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})$.

■

2. feladat. Igazold, hogy a 2019, 20192019, ..., $\underbrace{20192019\ldots2019}_{2022 \text{ db } 2019\text{-es}}$ számok közül van olyan, amelyik osztható 2021-gyel!

Turdean Katalin, Zilah

Megoldás. Legyen

$$x_k = \underbrace{20192019\ldots2019}_{k \text{ db } 2019\text{-es}},$$

ahol $k \in \{1, 2, \ldots, 2022\}$.
A 2021-gyel való osztáskor 2021 különböző maradékot kaphatunk, ezek a $0, 1, \ldots, 2020$. (**1 pont**)
Mivel 2022 számunk és 2021 különböző maradékunk van, ezért létezik két olyan szám, amelynek a 2021-gyel való osztási maradéka megegyezik. Legyen ez a két szám x_k és x_l, ahol $1 \leq k < l \leq 2022$. (**2 pont**)
Innen következik, hogy az $x_l - x_k = x_{l-k} \cdot 10^{4k}$ osztható 2021-el. (**3 pont**)
A 10^{4k} és 2021 relatív prímek, (**2 pont**)
ezért x_{l-k} osztható 2021-gyel. (**1 pont**)
Hivatalból (**1 pont**)

■

3. feladat. Az $ABCD$ konvex négyszögben legyen M az átlók metszéspontja. Igazold, hogy

a) $\sqrt{AM \cdot BM} + \sqrt{CM \cdot DM} \leq \sqrt{(AM + MC) \cdot (BM + MD)}$;

b) $\sqrt{T_{AMB}} + \sqrt{T_{BMC}} + \sqrt{T_{CMD}} + \sqrt{T_{DMA}} \leq 2\sqrt{T_{ABCD}}$.

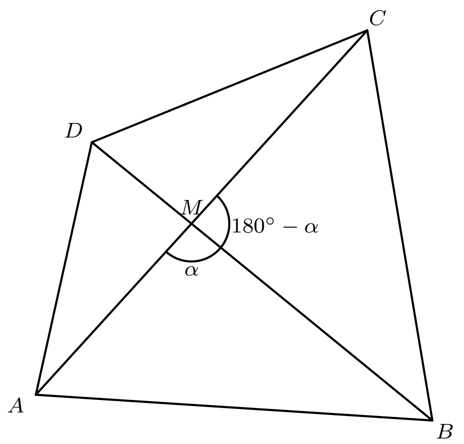
dr. Bencze Mihály, Brassó

Első megoldás. a) A feladatbeli egyenlőtlenség mindkét oldalát négyzetre emelve kapjuk a következő vele egyenértékű egyenlőtlenségeket:

$$\sqrt{AM \cdot BM} + \sqrt{CM \cdot DM} \leq \sqrt{(AM + MC) \cdot (BM + MD)},$$

$$AM \cdot BM + CM \cdot DM + 2\sqrt{AM \cdot BM \cdot CM \cdot DM} \leq AM \cdot BM + AM \cdot MD + MC \cdot BM + MC \cdot MD,$$

$$0 \leq \left(\sqrt{AM \cdot MD} - \sqrt{MC \cdot BM}\right)^2. \quad \textbf{(2 pont)}$$



b) Legyen $m(\widehat{AMB}) = \alpha$, így $m(\widehat{BMC}) = 180° - \alpha$. Felírjuk a háromszögek területét

$$T_{AMB} = \frac{MB \cdot MA \cdot \sin\alpha}{2}, \qquad T_{CMD} = \frac{MC \cdot MD \cdot \sin\alpha}{2},$$
$$T_{BMC} = \frac{MB \cdot MC \cdot \sin\alpha}{2}, \qquad T_{DMA} = \frac{MA \cdot MD \cdot \sin\alpha}{2},$$

ahol figyelembe vettük, hogy $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$. **(2 pont)**

$$\begin{aligned} T_{ABCD} &= T_{AMB} + T_{BMC} + T_{CMD} + T_{DMA} \\ &= \frac{[MB \cdot (MA + MC) + MD \cdot (MA + MC)] \cdot \sin\alpha}{2} \\ &= \frac{(MA + MC) \cdot (MB + MD) \cdot \sin\alpha}{2}. \end{aligned}$$ **(2 pont)**

Használva az a) alpontban kapott egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$\sqrt{T_{AMB}} + \sqrt{T_{CMD}} \le \sqrt{T_{ABCD}}. \tag{1}$$

Hasonlóan $\sqrt{MB \cdot MC} + \sqrt{MA \cdot MD} \le \sqrt{(MA + MC) \cdot (MB + MD)}$, ahonnan

$$\sqrt{T_{BMC}} + \sqrt{T_{DMA}} \le \sqrt{T_{ABCD}}. \tag{2}$$

(2 pont)

Az (1)-es és (2)-es egyenlőtlenségek megfelelő oldalait összeadva megkapjuk a kért egyenlőtlenséget. **(1 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

■

Második megoldás. a) Legyen $AM = a^2$, $BM = b^2$, $CM = c^2$ és $DM = d^2$, ahol $a, b, c, d > 0$.

A Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség alapján tudjuk, hogy

$$(a^2 + c^2)(b^2 + d^2) \ge (ab + cd)^2.$$

Gyököt vonva a fenti egyenlőtlenség mindkét oldalából következik az igazolandó egyenlőtlenség.

b) Legyen $T_{AMB} = x^2$, $T_{BMC} = y^2$, $T_{CMD} = z^2$ és $T_{DMA} = t^2$, ahol $x, y, z, t > 0$. Ez alapján $T_{ABCD} = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$. Az x, y, z, t számokra felírt számtani és négyzetes közepek közötti egyenlőtlenségből következik az igazolandó egyenlőtlenség.

■

Megjegyzés. A második megoldás alapján a feladatban megadott egyenlőtlenségek az $ABCD$ konvex tetszőleges M belső pontjára fennállnak.

4. feladat. Felírjuk a táblára 1-től 2020-ig az összes természetes számot. Letörölünk két olyan számot, melyek különbsége osztható 3-mal, és helyettük a két szám összegét írjuk fel. Ezt az eljárást addig ismételjük, ameddig lehetséges. Igazold, hogy az eljárás végén a táblán pontosan két szám marad!

Zajzon Csaba, Barót
Mátyás Ildikó Beáta, Szatmárnémeti
Szász Szilárd, Marosszentkirály

Első megoldás. Két szám különbsége pontosan akkor osztható 3-mal, ha a 3-mal való osztási maradékuk megegyezik. A táblán szereplő számok közül 674 darab $3k+1$ alakú, 673 darab $3k+2$ és 673 darab $3k$ alakú.

(**1 pont**)

Két $3k$ alakú szám összege is $3k$ alakú, ezért ha két ilyen számot választunk ki letörlésre, akkor a táblán lévő $3k$ alakú számok száma egyel csökken. Ezért, ha már nem folytatható az eljárás, akkor a $3k$ alakú számok közül pontosan egy maradt a táblán. (**1 pont**)

Két $3k+1$ alakú szám összege $3k+2$ alakú, ezért ha két ilyen számot törlünk le, akkor helyettük egy $3k+2$ alakú szám kerül fel a táblára. Ebben az esetben a táblán lévő $3k+1$ alakú számok száma 2-vel csökken, míg a $3k+2$ alakú számoké 1-gyel növekszik. (**1 pont**)

Két $3k+2$ alakú szám összege $3k+1$ alakú, ezért ha két ilyen számot törlünk le, akkor helyettük egy $3k+1$ alakú szám kerül fel a táblára. Ebben az esetben a táblán lévő $3k+2$ alakú számok száma 2-vel csökken, míg a $3k+1$ alakú számoké 1-gyel növekszik. (**1 pont**)

A fentiek alapján a $3k+1$ alakú és $3k+2$ alakú számok számának különbsége 3 többszörösével változik. (**2 pont**)
Az eljárás elején ez a különbség $674 - 673 = 1$, így a végén a különbség 3-mal való osztási maradéka 1 kell legyen. (**1 pont**)

Az eljárás befejeződésekor úgy a $3k+1$ alakú számok száma, mint a $3k+2$ alakú számok száma legfeljebb egy. Másrészt az előző észrevétel alapján ekkor a táblán $3k+1$ alakú számból legalább egyel több kell legyen, mint $3k+2$ alakúból. Ez csak úgy lehetséges, ha $3k+1$ alakú számból egy darab marad és $3k+2$ alakúból egy sem.

Összegezve, ha már az eljárás nem folytatható, akkor a táblán maradt egy $3k$ alakú és egy $3k+1$ alakú szám, vagyis a végén 2 szám marad a táblán. A fenti gondolatmenetet felhasználva adható egy olyan algoritmus, amely végrehajtásával elérhető hogy a táblán pontosan két szám maradjon.

(**2 pont**)

Hivatalból (**1 pont**)

■

Második megoldás. Vegyük észre, hogy a táblán lévő számok összege nem változik, illetve az összeg 3-mal való osztási maradéka 1. **(2 pont)**
Két $3k$ alakú szám helyett egy $3k$ alakú kerül mindig vissza a táblára, tehát az eljárás végén a táblán marad egy $3k$ alakú szám. **(1 pont)**

Háromnál több szám nem maradhat a táblán, mert a skatulya elv alapján ekkor lenne kettő amelynek a 3-mal való osztási maradéka megegyezik, és ez esetben az eljárás tovább folytatódna. **(2 pont)**

Ha három szám maradna a táblán, akkor azok 3-mal való osztási maradéka páronként különböző kell legyen, ellenkező esetben az eljárás folytatódna. Viszont, ha a maradékok páronként különbözőek, akkor ezeknek az összege 3, ami ellentmond annak, hogy a táblán lévő számok 3-mal való osztási maradéka 1. **(2 pont)**

Ugyanakkor a táblán legalább két számnak kell maradnia, mert biztosan marad egy 3-mal osztható és tudjuk, hogy a fentmaradó számok összegének a 3-mal való osztási maradéka 1. **(1 pont)**

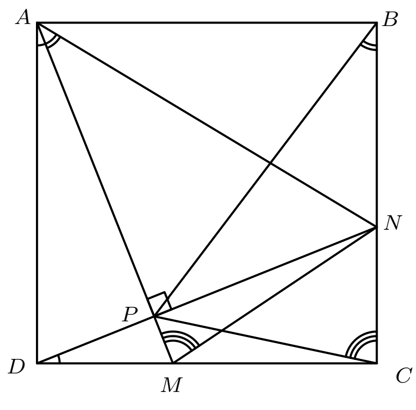
Az eljárás során minden lépésben egyel csökken a táblán levő számok száma, ezért 2018 lépés után mindig elérjük, hogy a táblán két szám legyen. **(1 pont)**
Hivatalból **(1 pont)**

■

5. feladat. Az $ABCD$ négyzet oldalain felvesszük az $M \in (CD)$ és $N \in (BC)$ pontokat, melyekre $\dfrac{DM}{MC} = \dfrac{CN}{NB} = k$. Határozd meg a k arány értékét úgy, hogy $\dfrac{T_{BPC}}{T_{ANM}} = \dfrac{9}{13}$, ahol $\{P\} = DN \cap AM$.

Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy

Megoldás. Tekintsük az alábbi ábrát.



Egyrészt az M és N pontok ugyanolyan arányban osztják a (CD), illetve a (BC) oldalakat, ezért könnyű belátni, hogy $ADM_\triangle \equiv DCN_\triangle$, ahonnan $m(\widehat{DAM}) = m(\widehat{CDN}) = \alpha$. **(2 pont)**

Másrészt az APD háromszögben a szögösszegre vonatkozó tétel alapján

$$m(\widehat{APD}) = 180^\circ - \alpha - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ,$$

vagyis $AM \perp DN$. **(1 pont)**
Emiatt az $APNB$ és $CNPM$ négyszögek körbeírhatóak. **(2 pont)**
Innen már következik, hogy az ANM és BPC háromszögekben két-két szög kongruens, ezért ez a két háromszög hasonló. **(1 pont)**

Harmadrészt, felhasználva, hogy két hasonló háromszög területének aránya egyenlő a hasonlósági arány négyzetével, írhatjuk, hogy

$$\frac{9}{13} = \frac{T_{BPC}}{T_{ANM}} = \frac{BC^2}{AM^2} = \frac{a^2}{a^2\left(1 + \frac{k^2}{(k+1)^2}\right)} = \frac{k^2+2k+1}{2k^2+2k+1}. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Innen az $5k^2 - 8k - 4 = 0$ egyenlethez jutunk, ahonnan a $k > 0$ feltétel miatt $k = 2$ adódik.
(1 pont)
Hivatalból **(1 pont)**
■

6. feladat. Legyen x egy olyan valós szám, amelyre $x^3 + 2x$ és $x^5 + 3x$ racionálisak. Igazold, hogy az x racionális szám! *dr. Bencze Mihály, Brassó*

Megoldás. Bevezetjük az

$$a = x^3 + 2x \in \mathbb{Q} \qquad \text{és} \qquad b = x^5 + 3x \in \mathbb{Q}$$

jelöléseket. Ha $a = 0$ vagy $b = 0$, akkor $x = 0$, ami racionális. **(1 pont)**
A továbbiakban az $x \neq 0$ esetet vizsgáljuk. A bevezetett jelölések alapján

$$-ax^2 = -(x^3 + 2x)x^2 = -x^5 - 2x^3.$$

Innen $b - ax^2 = (x^5 + 3x) - x^5 - 2x^3 = -2x^3 + 3x$. **(2 pont)**
A $b - ax^2 = -2x^3 + 3x$ összefüggésbe $x^3 = a - 2x$-et helyettesítve kapjuk, hogy $-2(a - 2x) + 3x = b - ax^2$, tehát

$$ax^2 + 7x - (2a + b) = 0. \tag{1}$$

(2 pont)
Az utóbbi összefüggést beszorozva x-szel kapjuk, hogy $ax^3 + 7x^2 - (2a + b)x = 0$. Az utóbbi összefüggésbe $x^3 = a - 2x$-et helyettesítve kapjuk, hogy $a(a - 2x) + 7x^2 - (2a + b)x = 0$, ami

$$7x^2 - (b + 4a)x + a^2 = 0 \tag{2}$$

alakra hozható. **(1 pont)**
Az (1)-es összefüggés 7-szereséből kivonva a (2)-es összefüggés a-szorosát kapjuk, hogy

$$x(4a^2 + ab + 49) = a^3 + 7(2a + b). \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Mivel $4a^2 + ab + 49 = x^8 + 6x^6 + 19x^4 + 22x^2 + 49$ nem lehet nulla, ezért x kifejezhető két racionális szám arányaként

$$x = \frac{a^3 + 7(2a + b)}{4a^2 + ab + 49},$$

tehát x racionális, ha a és b racionálisak. **(2 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**
■