III. országos magyar matematikaolimpia
XXX. EMMV
Déva, 2020. február 11–16.

XII. osztály – I. forduló

1. feladat. Adott az $M = \left\{ \frac{2m+1}{2n+1} \,\middle|\, m, n \in \mathbb{Z} \right\}$ halmaz. Minden $a, c \in M$ és $b, d \in \mathbb{Z}$ esetén értelmezzük a $G = M \times \mathbb{Z}$ halmazon a „$\circ$" műveletet az

$$(a, b) \circ (c, d) = (ac, b + d)$$

szabállyal.

a) Igazold, hogy az $f\colon G \to \mathbb{Q}^*$, $f((a, b)) = a \cdot 2^b$ függvény bijektív!

b) Igazold, hogy $(G, \circ)$ Abel-csoport!

2. feladat. Határozd meg az $f\colon \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\cos x(1 - \sin 2x)}$$

függvény primitív függvényeit!

3. feladat. Adott az $a < 1$ valós szám. Határozd meg az összes olyan x, y, z valós számot, amelyekre

$$x + y + z = \frac{3(a+1)}{2}, \quad xy + yz + zx = 3a$$

és az xyz értéke a lehető legkisebb!

4. feladat. A $(G, \cdot)$ csoportban teljesülnek a következő feltételek:

a) a G elemeinek száma p^n, ahol p prímszám és $n \geq 2$ természetes szám;

b) ha H_1 és H_2 olyan részcsoportjai a G-nek, amelyekre $|H_1| = |H_2|$, akkor $H_1 = H_2$.

Igazold, hogy G-ben van olyan elem, amelynek a rendje p^n.

Megjegyzés: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér. Munkaidő 3 óra.