III. országos magyar matematikaolimpia
XXX. EMMV
Déva, 2020. február 11–16.

XI. osztály – I. forduló

1. feladat. Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ valós számsorozatot a következőképpen értelmezzük:

$$x_1 = 1 \quad \text{és} \quad x_{n+1} = n\cdot x_n + n - 1,$$

bármely $n \geq 1$ esetén. Ha

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+x_k} \quad \text{és} \quad b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{1+x_{k+1}},$$

számítsd ki a következő határétékeket:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

2. feladat. Ha $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, akkor igazold a

$$\frac{8}{3}\det(A^2 + A + I_2) \geq (1 - \det A)^2 + (1 + \operatorname{Tr} A)^2$$

egyenlőtlenséget!

3. feladat. Az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozatot a következőképpen értelmezzük: $x_1 \in (0,1)$ és $x_{n+1} = x_n - x_n^{k+1}$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, ahol $k \in \mathbb{N}^*$ rögzített.

a) Igazold, hogy a sorozat konvergens és számítsd ki a határértékét!

b) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{k}} x_n$ határértéket!

4. feladat. Legyen $n \geq 2$ egy természetes szám és $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, úgy, hogy $\det(A) = 1$ és a B mátrix összes eleme egyes. Igazold, hogy ha $\det(A^{-1} + B) = 1$, akkor A elemeinek összege nulla!

Megjegyzés: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér. Munkaidő 3 óra.