III. országos magyar matematikaolimpia
XXX. EMMV
Déva, 2020. február 11–16.

X. osztály – I. forduló

1. feladat. Adottak az $a_1, a_2, a_3 \in (1, +\infty)$ és

$$t = \frac{a_1^2}{2a_2 + a_3} + \frac{a_2^2}{2a_3 + a_1} + \frac{a_3^2}{2a_1 + a_2}$$

számok. Igazold, hogy $\log_{a_1} t + \log_{a_2} t + \log_{a_3} t \geq 3$.

2. feladat. Adott az O középpontú és egységsugarú körbe írt ABC háromszög és jelölje M, N és P rendre az AB, AC és BC oldalak felezőpontjait.

a) Igazold, hogy $9OG^2 + AB^2 + AC^2 + BC^2 = 9$, ahol G az ABC háromszög súlypontja!

b) Ha $4(MO^2 + NO^2 + PO^2) = 3$, igazold, hogy az ABC háromszög egyenlő oldalú!

3. feladat. Adott az $ABCDEF$ szabályos hatszög, melynek O a középpontja. Legyen $M \in (AB)$ és $N \in (BC)$ úgy, hogy $AM = BN$. Ha P felezőpontja az (NE) szakasznak, Q felezőpontja az (MP) szakasznak és R felezőpontja az (AO) szakasznak, igazold, hogy a C, Q, R pontok egy egyenesen helyezkednek el!

4. feladat. Adott az n rögzített természetes szám. Határozd meg azokat az $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ függvényeket, amelyekre

$$(xy)^n \cdot \lg(xy) \leq x^n f(y) + y^n f(x) \leq f(xy),$$

minden $x, y > 0$ esetén!

Megjegyzés: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér. Munkaidő 3 óra.