III. országos magyar matematikaolimpia
XXX. EMMV
Déva, 2020. február 11–16.

VIII. osztály

1. feladat. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$(2x^2 - 2x + 3)(45y^2 - 30y + 41) = 90.$$

2. feladat. Igazold, hogy

a) $1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} = \dfrac{a^n - 1}{a - 1}$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ és $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ esetén;

b) $2020^{2020} - 1$ osztható 2019-cel;

c) $\dfrac{2020^{2020} - 1}{2019}$ nem teljes négyzet!

3. feladat. Bűvös piramist építenek 1 cm oldalélű kockákból. Ennek minden szintje négyzet alakú és a szintek rendre n^2, $(n-1)^2$, $\ldots$, 3^2, 2^2, 1^2 darab kockát tartalmaznak. Miután egymáshoz rögzítik az építőelemeket, egy 2352 cm^2 teljes felszínű testet nyernek. Hány szintes az elkészített piramis?

4. feladat. Az α, β és γ három páronként egymásra merőleges sík, melyek az O pontban metszik egymást, a teret 8 térnyolcadra osztva. Legyen $\mathcal{A}$ azon pontok halmaza a térben, melyek távolsága az α, β és γ síktól rendre 8 cm, 6 cm és 4 cm, valamint $\mathcal{B}$ azon pontok halmaza a térben melyek távolsága az α, β és γ síktól rendre 12 cm, 9 cm és 6 cm.

a) Igazold, hogy létezik, olyan $P \in \mathcal{A}$ és $Q \in \mathcal{B}$, amelyre az O, P és Q pontok kollineárisak!

b) Hány olyan páronként egymással nem egybevágó téglatest létezik, amely rendelkezik az alábbi két tulajdonsággal:

- lapjai rendre párhuzamosak az α, β, γ síkok valamelyikével;
- van olyan testátlója, amelynek az egyik végpontja az $\mathcal{A}$, a másik pedig a $\mathcal{B}$ halmaz eleme?

c) Mennyi lehet a PQ szakasz hossza, ha $P \in \mathcal{A}$, $Q \in \mathcal{B}$ és mindkét pont ugyanabban a térnyolcadban helyezkedik el?

Megjegyzés: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér. Munkaidő 3 óra.