III. országos magyar matematikaolimpia
XXX. EMMV
Déva, 2020. február 11–16.

X. osztály – II. forduló

1. feladat. Oldd meg a valós számok halmazán az

$$x \cdot \left(24 + 3\sqrt{15}\right)^{\lg x} + 210 = 30 \cdot \left(15 + \sqrt{15}\right)^{\lg x}$$

egyenletet!

2. feladat. Az ABC háromszögben a $\widehat{BAC}$ szögfelezője a D pontban metszi (BC) oldalt és tudjuk, hogy $AB = 15$, $AC = 10$, $AD = 6$. Számítsd ki az ABC háromszög köré írt kör sugarát!

3. feladat. Ha $a_1, a_2, \ldots, a_n$ valós számok, $a_1 \geq 1$ és $a_{n+1} \geq a_n + 1$, minden $n \geq 1$ esetén, akkor igazold, hogy

a) $a_n a_{n+1} \geq 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$;

b) $a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_na_{n+1} \geq 2\sum\limits_{k=1}^{n}(n-k+1)a_k$.

4. feladat. Adottak a következő halmazok:

$$\{1\}; \quad \{3,5\}; \quad \{7,9,11\}; \quad \{13,15,17,19\}; \quad \ldots.$$

Jelölje S_n az n-edik halmaz elemeinek összegét. Igazold, hogy

$$\frac{(n-2)(n+5)}{24(n+1)(n+2)} < \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{S_k} < \frac{(n-2)(n+3)}{12n(n+1)}.$$

5. feladat. Egy (a, b) pozitív egész számokból álló számpárt *dévainak* nevezünk, ha az $\frac{a}{b}$ egy valódi tört és az irreducibilis alakjában a számláló és a nevező páratlan. Igazold, hogy ha az $A = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ halmazból kiválasztunk véletlenszerűen 8 darab számot, akkor biztosan lesz közöttük két olyan szám, ami dévai számpárt alkot!

6. feladat. Az ABC háromszögben legyen $BC > AC$ és legyen D a BC oldal egy olyan pontja, amelyre $BD = AC$, és $m(ADC) < 90°$, valamint $m(\widehat{B}) = m(\widehat{DAC}) = 30°$.

a) Igazold, hogy $\sin 54° = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$, esetleg használva, hogy egy hegyesszög szinusza egyenlő a pótszögének koszinuszával!

b) Számítsd ki az ABC háromszög szögeinek mértékét!

Megjegyzés: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér. Munkaidő 4 óra.