VII.5. GÚLA RAJZISKOLA

A feladatsor jellemzői

Tárgy, téma

Háromszögalapú gúla látszati rajzának elkészítése, gúlával kapcsolatos számítások.

Előzmények

Térelemek távolsága, szöge, a háromszög nevezetes vonalai, pontjai, Pitagorasz-tétel, szögfüggvények, gúla felszíne, térfogata.

Cél

A térgeometriai problémákhoz szükséges modellalkotási folyamat fejlesztése, látszati rajz készítésének begyakorlása, gúlával kapcsolatos számítások megértetése.

A feladatsor által fejleszthető kompetenciák

Tájékozódás a térben	+
Tájékozódás az időben	
Tájékozódás a világ mennyiségi viszonyaiban	+
Tapasztalatszerzés	+
Képzelet	+
Emlékezés	
Gondolkodás	+
Ismeretek rendszerezése	+
Ismerethordozók használata	

Ismeretek alkalmazása	+
Problémakezelés és -megoldás	+
Alkotás és kreativitás	+
Kommunikáció	+
Együttműködés	
Motiváltság	+
Önismeret, önértékelés	+
A matematika épülésének elvei	

Felhasználási útmutató

A feladatsor megoldásához az aktívabbak, illetve gyengébb térgeometriai személettel rendelkezők részére készíthető (vagy velük készíttethető) térbeli modell (élváz) például drótból vagy műanyag, harmonikás nyakú szívószálból.

A tanulók a feladatlap utasításait követve önállóan dolgozzanak, de tanári felügyelettel. Ha valamely kérdésnél valaki elakad, akkor a tanár adjon segítséget, rávezető kérdés vagy hasonló, de egyszerűbb feladat adásával. Az önálló munka azért fontos, mert a szövegértést is gyakoroltatja a feladatlap. A munka végén érdemes megbeszélni az elkészített rajzokat, az elkészítés miértjét, hogyanját, valamint további problémák felvetésére ösztönözni a diákokat. A feladatok megoldásait érdemes prezentációban is elkészíteni, amely összefoglalásként jól alkalmazható. A megoldások egyes ábrái jól végigvezetnek az egymást követő lépéseken.

Érdemes felhívni arra a figyelmet, hogy a térgeometriai kérdések megoldása során gyakran hasznos megfelelő síkmetszet kiválasztásával a térbeli kérdést síkbelire visszavezetni, s hogy igen gyakran szükséges a számítást lehetővé tevő derékszögű háromszög keresése.

Folyamatosan figyelemmel kell kísérni, hogy ki hogyan boldogul a feladatok megoldásával. Mivel a megoldások ideális esetben nem tartanak túl sokáig, ezért ha valaki elakad, rögtön kapjon segítséget, különben unatkozni fog, illetve jelentősen lemarad a többiektől. Érdemes folyamatosan azt is kontrollálni, hogy az elkészült rajzok megfelelőek-e, mert a rajzi hibák kihatással lehetnek a számítások elvégzésére is.

A fejlesztési folyamat végére lehetőleg mindenkinek el kell jutnia a képességfejlesztésben arra a szintre, hogy viszonylag gyorsan fel tudjon vázolni háromszögalapú gúlát, szabályos tetraédert, és a megfelelő térelemek szögét, távolságát megtalálja az ábrán.

GÚLA RAJZISKOLA

Feladatsor

1. Rajzold meg egy szabályos tetraéder látszati képét! Az alábbi utasításokat követve könnyedén elkészítheted a kért ábrát.

a) Rajzolj egy tompaszögű háromszöget, melynek három éle különböző hosszúságú, a „középső” él (*AB*) nagyjából vízszintes helyzetű, s a *C* pont a *B*-től jobbra, felfelé helyezkedik el.
b) Keresd meg a súlyvonalak metszéspontjaként a háromszög súlypontját!
c) A súlypontból indulva rajzolj egy függőleges szakaszt, melynek hossza kb. megegyezik a háromszög középső oldalának hosszával. A szakasz felső végpontját (*D*) kösd össze a háromszög csúcspontjaival, s máris előtted a tetraéder látszati képe.
d) Vastagítsd meg az *AB*, *BC*, *AD*, *BD*, *CD* éleket; ezeket látjuk. Az *AC* él hátul, takarásban van.
Mivel az ABC háromszög egy szabályos háromszög látszati képe, az alapháromszög T súlypontja a tetraéder DT magasságának talppontja. Ha a BD él nagyon közel esik vagy egybeesik a DT magassággal, rajzolj új ábrát, kicsit más arányokkal. A látszati rajz készítésénél alkalmazhatót javasolt oldalarányok: AB : BC : DA = 5 : 3 : 7, az ABC szög kb. 140°-os.

2. Egy szabályos tetraéder élei 6 cm hosszúak.

a) Számítsd ki a tetraéder egy oldallapjának területét!
b) Mekkora a test felszíne?
c) Mekkora a tetraéder magassága?
d) Számítsd ki a tetraéder térfogatát!

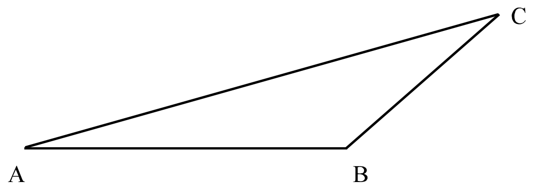
3. Szabályos háromszög alapú gúla alapéle 6 cm, oldalélei 8 cm hosszúak.

a) Készítsünk látszati ábrát! (Ha olyan szabályos háromoldalú gúlát rajzolunk, amelynek oldalélei nem egyeznek meg az alapélekkel, akkor a *DT* magasságot a rajzon kisebbre vagy nagyobbra kell vennünk! Jelöljük a *BC* él felezőpontját *E*-vel, és rajzoljuk meg a *BCD* oldallap *DE* oldalmagasságát is!)
b) Mekkora szöget zár be egymással a gúla egy oldaléle és egy ehhez csatlakozó alapéle?
c) Mekkora szöget zár be a gúla oldaléle az alaplapjával?
d) Mekkora szöget zár be a gúla oldallapja az alaplapjával?

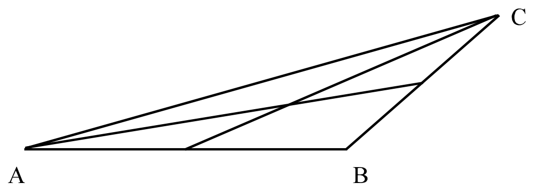
MEGOLDÁSOK

1.

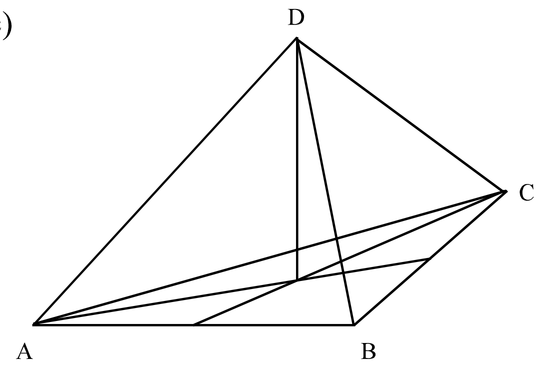
a)



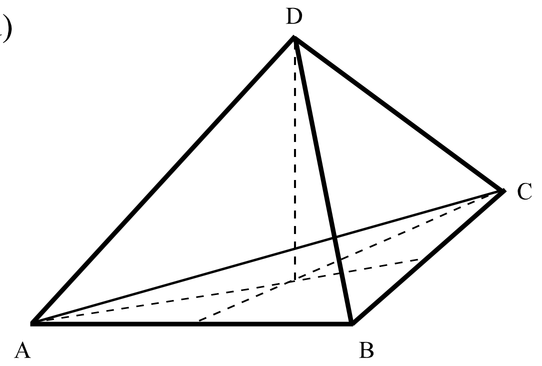
b)



c)



d)



2. a) Az a oldalú szabályos háromszög területe $T = a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, így $T = \frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \approx 15{,}6\,\text{cm}^2$.

b) $A = 4T = a^2 \cdot \sqrt{3} = 36\sqrt{3} \approx 62{,}4\,\text{cm}^2$.

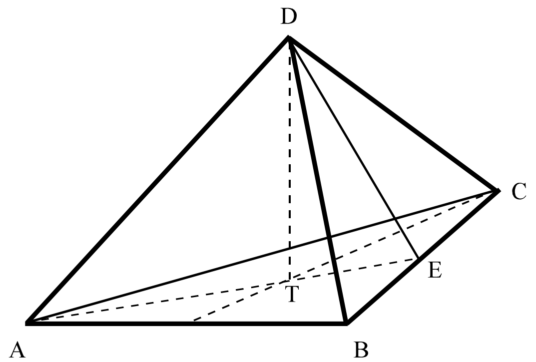
c) Legyen az *AB* él felezőpontja *F*. A tetraéder magassága a *DFF* háromszög magassága. A CTD derékszögű háromszögben CT az alapháromszög magasságának s egyben súlyvonalának kétharmad része, tehát $CT = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} \approx 3{,}5\,\text{cm}$.

A Pitagorasz-tételt alkalmazva a tetraéder magassága:

$$m = DT = \sqrt{a^2 - \frac{a^2 \cdot 3}{9}} = a\sqrt{\frac{2}{3}} = 6 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 4{,}9\,\text{cm}.$$

d) $V = \frac{Tm}{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{3} = a^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{12} = 18\sqrt{2} \approx 25{,}5\,\text{cm}^3.$

3. a)



b) A keresett szög $DCB\sphericalangle = DCE\sphericalangle = \alpha$, a *DCE* derékszögű háromszögben:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{DE}{EC} = \frac{\sqrt{8^2 - 3^2}}{3} = \frac{\sqrt{55}}{3} \approx 2{,}4721 \to \alpha \approx 67{,}98°.$$

c) A keresett szög $DCF\sphericalangle = \beta$, a *DCT* derékszögű háromszögben:

$$\cos\beta = \frac{TC}{DC} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{2}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0{,}4330 \to \beta = 64{,}34°.$$

d) A keresett szög $DEA\sphericalangle = \gamma$, a *DET* derékszögű háromszögben:

$$\cos\gamma = \frac{TE}{ED} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{6\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{8^2 - 3^2}} = \sqrt{\frac{3}{55}} \approx \sqrt{0{,}2335} \approx 0{,}4833 \to \gamma \approx 61{,}1°.$$